

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

LIONEL HUGON

Maitre-Assistant à la Faculté des Sciences

DIFFUSION DES MESONS π^- SUR NOYAUX DE CARBONE 12
AUTOUR DE LA RÉSONANCE (3/2, 3/2) PION-NUCLÉON

Soutenue le 25 Avril 1970 devant la commission d'examen

M. R. COMBE	<i>Président</i>
M. L. AVAN	} Examineurs
M. D. ISABELLE	
M. M. SPIGHEL	
	Invité

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

LIONEL HUGON

Maitre-Assistant à la Faculté des Sciences

DIFFUSION DES MESONS π^- SUR NOYAUX DE CARBONE 12
AUTOUR DE LA RÉSONANCE (3/2, 3/2) PION-NUCLÉON

Soutenue le 25 Avril 1970 devant la commission d'examen

M. R. COMBE	<i>Président</i>
M. L. AVAN	} Examineurs
M. D. ISABELLE	
M. M. SPIGHEL	
	Invité

THESIS

BY

A. LA FARGE

DE L'UNIVERSITE DE QUEBEC

1968

LE DEPT. DE

SCIENCE POLITIQUE

1968

UNIVERSITY OF QUEBEC

LIBRARY



UNIVERSITY OF QUEBEC

LIBRARY

UNIVERSITY OF QUEBEC

LIBRARY

FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE CLERMONT-FERRAND

Doyen : M. KOHLMULLER

Assesseur : M. RAOULT

PROFESSEURS

M. RAMBAUD René	Chimie
M. BLANC Eugène	Mathématiques Pures
M. ROQUES Maurice	Géologie
M. LAPADU-HARGUES	Minéralogie
M. LUTZ Hubert	Biologie Animale
M. RAOULT Gaston	Physique
M. CHAMPAGNAT Paul	Physiologie Végétale
M. DUPLESSIS-KERGOMARD Alain	Chimie
M. AVAN Jean-Louis	Physique Expérimentale
Mme HENNEQUIN Françoise	Mathématiques Pures
Mlle BERTHET Ginette	Physique
M. LOISEAU Jean	Botanique
M. COMBE René	Physique
M. de PUYTORAC Pierre	Zoologie
Mme AVAN Madeleine	Physique
Mlle DONDON Marie-Louise	Chimie Physique
M. DELOST Paul	Physiologie Animale
M. VIALARD André	Chimie
M. KOHLMULLER Robert	Chimie Minérale
M. GUILLAUME Marcel	Algèbre
M. COMBE Jean	Physique
M. HENNEQUIN Paul	Mathématiques Appliquées
M. L'HERITIER Philippe	Génétique
M. VESSIERE Roger	Chimie Organique
M. BAILLAUD Lucien	Botanique
M. BERNARD Maurice	Physique
M. JOYON Louis	Zoologie I.U.T.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548424_0002

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. PETERLONGO Jean-Marc	Géologie
M. BATHIER Marcel	Physique
M ^{le} DUCHER Suzanne	Chimie
M. FALGAS Maurice	Mathématiques Pures
M. MARTINET Pierre	Chimie
M. MAISONNEUVE Jacques	Géologie
M. CAPESTAN Michel	Chimie
M. LENOIR Marcel	Mathématiques Pures
M. THOMAS Jean	Physique
M. ISABELLE Didier	Physique
M. CAUBERE Paul	Chimie
M. ROCHE Jean	Physique I.U.T.

MAITRES DE CONFERENCES

M. SOULAGE René	Géophysique Générale
M. DUFAURE Jean-Pierre	Zoologie
M. BADRIKIAN Albert	Mathématiques Appliquées
M. COURDURoux Jean-Claude	Botanique
M. GRAIN Jean	Zoologie
M ^{me} BESSERRE Anne-Marie	Mathématiques Pures
M. JEAN Claude	Physiologie Animale
M. LE THAN PHONG	Mathématiques Pures
M. MIGNOT Jean-Pierre	Zoologie
M. VELLE Y Georges	Psycho-Physiologie
M. COUSSEINS Jean-Claude	Chimie
M. LEMAIRE Jacques	Chimie
M. CHADEYRAS Marcel	Mathématiques Pures
M. BOILLAT Guy	Mathématiques Pures
M. CADORET Robert	Physique
M. LE MEN Jean-François	Physique
M. GAGNY Claude	Géologie
M. GUILLOT Albert	Biologie Appliquée - I.U.T.
M. NIGOND	Agronomie - I.U.T.

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. COFFI N'KETSIA Barben Jean	Mathématiques Pures
M. AUSLENDER Alfred	Mathématiques Appliquées
M. FANGUIN René	Physique - I.U.T.
M. LETAC	Informatique - I.U.T.

ATTACHEE PRINCIPALE

M^{me} CHOPART Marie-Louise

Je remercie Monsieur le Professeur R. COMBE, Président du Jury, et Monsieur le Professeur D. ISABELLE de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail et de l'honneur qu'ils me font.

Monsieur le Professeur L. AVAN m'a accueilli dans le Laboratoire de Physique Nucléaire qu'il a créé à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir engagé dans la voie de recherche qui est actuellement la mienne.

Monsieur M. SPIGHEL, Maître de Recherche au CNRS, a constamment dirigé mon travail. Sa compétence et les judicieux conseils qu'il m'a prodigués m'ont considérablement facilité la tâche. Ses encouragements amicaux m'ont également apporté une aide morale précieuse. Qu'il trouve ici l'expression de mes plus sincères remerciements. Je tiens à y associer, dans le même esprit, Monsieur le Professeur J.P. STROOT qui a guidé mes premières recherches au CERN et a su me convertir à la technique des compteurs.

L'expérience décrite dans ce mémoire est le résultat du travail d'un groupe comprenant Messieurs F. BINON, P. DUTEIL, J.P. GARRON, J. GORRES, L. HUGON, J.P. PEIGNEUX, C. SCHMIT, M. SPIGHEL, J.P. STROOT. Je tiens à assurer mes amis de toute ma reconnaissance pour les excellentes conditions dans lesquelles s'est établie cette collaboration.

Je remercie Monsieur le Professeur P. PREISWERK et Monsieur le Professeur T.E.O. ERICSON de l'intérêt qu'ils nous ont manifesté, Monsieur le Professeur M. JEAN qui est un des instigateurs de cette étude, Monsieur R. MEUNIER qui a participé à la réalisation du faisceau et à la prise des données.

Je remercie le Personnel de la Division du Synchrocyclotron, en particulier Monsieur W. ALBRECHT et Monsieur E. LEYA, pour leur dévouement et leur efficacité. Je remercie Mle G. Guittard et le Service d'Imprimerie de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand pour le soin avec lequel ce mémoire a été dactylographié et photocopié.

TABLE DES MATIERES

<i>SOMMAIRE</i>	3
<i>INTRODUCTION</i>	5
A. Historique	5
B. Intérêt des interactions π -noyau	6
C. Intérêt de la diffusion π -noyau	11
D. Notre expérience	13
<u>PREMIERE PARTIE - DESCRIPTION ET THEORIE DU FAISCEAU</u>	16
<i>CHAPITRE I - DOUBLE SPECTROMETRE ACHROMATIQUE : THEORIE AU 1er ORDRE</i>	17
A. Description de principe	17
B. Etude des trajectoires	18
C. Conditions d'achromatisme du double spectromètre	22
D. Effet de pupille. Efficacité de l'hodoscope	23
<i>CHAPITRE II - DOUBLE SPECTROMETRE ACHROMATIQUE : THEORIE AU 2ème ORDRE</i>	25
A. Introduction des sextupôles	25
B. Focalisation horizontale du spectromètre	26
C. Focalisation verticale du spectromètre	28
D. Angle de l'hodoscope	29
E. Effet de pupille. Modification des coefficients	30
F. Calibration de l'analyseur avec les α du ThC'	32
<i>CHAPITRE III - LES PROBLEMES D'ADAPTATION</i>	33
A. Le faisceau de pions en sortie de machine	33
B. Adaptation entre le faisceau de sortie et le spectromètre	35
C. Calcul des aberrations du monochromateur	36
D. Calcul des aberrations de l'analyseur	39
E. Chromatisme angulaire sur la cible du spectromètre	42
F. Etude géométrique des cibles	43
G. Solutions pratiques adoptées pour l'expérience $\pi^- 12C$	48
<u>DEUXIEME PARTIE - MESURES ET TRAITEMENT DES DONNEES</u>	49
<i>CHAPITRE IV - MESURE DES SECTIONS EFFICACES DIFFERENTIELLES</i>	50
A. Contrôles et mesures	50
B. Détermination des paramètres	53
C. Mesures des contaminations	58

<i>CHAPITRE IV BIS · RESULTATS DES MESURES DIFFERENTIELLES</i>	65
A. Erreurs et corrections	65
B. Diffusion élastique	73
C. Diffusion inélastique	75
<i>CHAPITRE V · LES SECTIONS EFFICACES TOTALES</i>	77
A. Méthode de mesure. Appareillage	77
B. Erreurs et corrections	83
C. Résultats des mesures	96
<u>TROISIEME PARTIE - ANALYSE ET DISCUSSION DES RESULTATS</u> <u>DE DIFFUSION ELASTIQUE</u>	100
<i>CHAPITRE VI · THEORIE DU POTENTIEL OPTIQUE POUR</i> <i>L'INTERACTION PION-NOYAU</i>	101
A. Equations intégrales de la diffusion	101
B. Formalisme de Lippmann-Schwinger	104
C. Dérivation du potentiel optique	107
D. Potentiel optique de Kisslinger	112
<i>CHAPITRE VII · ANALYSE EN POTENTIEL OPTIQUE ET</i> <i>DISCUSSION PHYSIQUE</i>	115
A. Choix de l'analyse	115
B. Méthode de calcul	117
C. Résultats et interprétation	123
<i>CONCLUSIONS</i>	133
<u>APPENDICE I - INFLUENCE DES ELEMENTS DE SYMETRIE ET</u> <u>D'ANTISYMETRIE DANS LES CHAMPS MAGNE-</u> <u>TIQUES. EFFETS DU 2ème ORDRE</u>	137
<u>APPENDICE II- SHIMMING DES SECTEURS MAGNETIQUES</u>	144
<u>APPENDICE III - CHROMATISME D'UN TRIPLET SYMETRIQUE</u>	147
<u>APPENDICE IV - ETUDE EXPERIMENTALE DU FONCTIONNEMENT</u> <u>DE L'ANALYSEUR</u>	150
<u>APPENDICE V - DIFFUSION PAR UN POTENTIEL CENTRAL</u>	155
<u>APPENDICE VI - LES RELATIONS DE DISPERSION</u>	166
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	174

S O M M A I R E

Après une introduction où nous expliquons l'intérêt des pions en tant que sonde nucléaire, nous décrivons une expérience réalisée auprès du synchrocyclotron de 600 MeV du CERN. Il s'agit de la diffusion π^- sur ^{12}C entre 120 et 280 MeV d'énergie cinétique, dans une zone comprenant la résonance $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ pion-nucléon.

La première partie concerne la réalisation du faisceau qui comporte une optique de transfert amenant les pions produits dans la machine jusqu'à la salle d'expérience où se trouve un double spectromètre achromatique. Les problèmes d'adaptation entre les différentes parties du montage sont discutés. Les calculs du double spectromètre sont poussés jusqu'aux aberrations du second ordre qui peuvent être réduites au moyen de sextupôles. Nous avons montré qu'une résolution inférieure à 10^{-3} était ainsi réalisable.

La deuxième partie concerne les mesures et le traitement des données. Nous décrivons le fonctionnement de l'appareillage, les méthodes de calibration et les corrections physiques. Dans le cas des sections efficaces différentielles la contribution des électrons et des muons a été déterminée par temps de vol et mesures de parcours. Nous avons dû procéder à une étude détaillée du bruit de fond. Dans le cas des sections efficaces totales l'emploi d'un détecteur Cerenkov DISC éliminait entièrement la contamination du faisceau. La principale correction correspondait à l'absorption dans les cibles utilisées.

La troisième partie concerne l'analyse des données et la discussion des résultats. Après avoir rappelé la théorie du potentiel optique à partir du formalisme de Lippman-Schwinger, nous établissons la forme de Kisslinger et montrons que l'équation de Klein-Gordon avec un tel potentiel peut être intégrée analytiquement dans le cas d'une distribution nucléaire en puits carré. Notre analyse est entièrement phénoménologique et comporte essentiellement cinq paramètres libres.

Nous présentons nos résultats en les comparant aux résultats déjà connus en dessous de 100 MeV, ainsi qu'aux prévisions théoriques. L'accord est satisfaisant pour nos mesures aux plus basses énergies. Ce n'est plus le cas lorsqu'on approche de la résonance $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ pion-nucléon qui ne semble pas se traduire par une résonance semblable pour l'ensemble du noyau.

Nous concluons sur l'intérêt considérable des problèmes posés dans le domaine des mécanismes nucléaires. Certaines observations sont extrêmement surprenantes et ouvrent la voie à de nouvelles recherches tant expérimentales que théoriques.

INTRODUCTION

A. Historique

La découverte du méson π en 1947⁽¹⁾ et les premières études qui en résultèrent furent effectuées par la technique des émulsions nucléaires dans le rayonnement cosmique. Les premières expériences réalisées auprès d'accélérateurs sur des faisceaux secondaires datent de 1951. Dans les années qui suivirent l'étude des interactions pion-noyau devint un sujet important de la recherche fondamentale et les expériences se multiplièrent jusqu'en 1957-1958 (voir par exemple (2) (3), (4) et les références incluses).

Les physiciens passèrent très vite sur cette physique des moyennes énergies, laissant le champ vierge de toute exploitation théorique satisfaisante, pour s'adonner à la physique des particules élémentaires qui ne fournit pratiquement plus d'information nucléaire.

En 1962, à la conférence de Padoue sur les Interactions directes, Ericson et Jean cherchèrent à ranimer l'étude des interactions pion-noyau. En 1963, une conférence internationale sur la Physique des Hautes Energies et la Structure nucléaire fut organisée au CERN. Son but était de réunir des physiciens de différentes tendances, de façon à combattre une dispersion des intérêts scientifiques et à mettre en lumière un certain nombre de lignes de recherche négligées. Ericson⁽⁵⁾ montra tout l'intérêt que présente le pion en tant qu'outil indispensable et pratiquement le seul disponible dans l'étude de certaines propriétés nucléaires. Jean⁽⁶⁾ continua la campagne et insista sur le fait que les techniques de détection et les faisceaux disponibles alors devaient permettre de reprendre les recherches nucléaires au moyen des pions.

Les expériences reprirent effectivement peu après et ce type de physique est à nouveau à l'ordre du jour. On en attend beaucoup compte tenu de ce qu'une nouvelle génération de machines, actuellement en préparation, permettra d'obtenir enfin des faisceaux de pions plus comparables en intensité aux faisceaux de protons actuellement disponibles.

Voir (7) pour une bibliographie récente dans ce domaine.

Voir (8) pour un rassemblement des données disponibles en 1968.

Une nouvelle mise au point sur les interactions pion-noyau vient de paraître en 1970⁽⁹⁾.

B. Intérêt des interactions π -noyau

Le pion peut être considéré comme une sonde utilisable au même titre que les électrons et les protons, mais possédant des propriétés particulières intéressantes.

1) Le pion a un spin nul, ce qui simplifie notablement les problèmes théoriques. C'est la plus légère des particules à interaction forte et les corrections de recul sont généralement négligeables comparativement à l'interaction nucléon-nucléon.

L'interaction pion-nucléon est dominée par les ondes s et p jusqu'à quelques centaines de MeV, en contraste avec l'interaction nucléon-nucléon, ce qui est dû au fait que la longueur d'onde Compton du pion

$$\frac{h}{mc} = \frac{197,32}{139,58} \approx 1,4 \text{ F } (\sim \text{des distances nucléaires})$$

est 7 fois plus grande que celle du nucléon. Par ailleurs, les difficultés techniques dues au principe d'exclusion de Pauli sont réduites puisque le pion et le nucléon sont des particules différentes.

Par rapport aux électrons, les pions ne nécessitent pas de correction radiative.

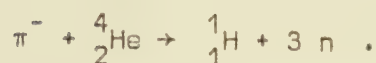
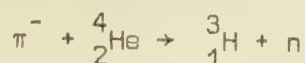
Nous pouvons donc penser que l'étude des propriétés nucléaires au moyen des pions (de charge $\pm$) doit être particulièrement rentable du point de vue de l'exploration théorique.

2) Le pion est un boson comme le photon, mais bien plus facile à contrôler expérimentalement du point de vue cinématique. Il peut être absorbé dans un noyau à condition de respecter la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

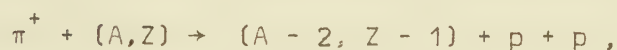
Les pions au repos sont absorbés en libérant une énergie cinétique de 140 MeV, ce qui correspond pour un seul nucléon à une quantité de mouvement de 500 MeV/c. La valeur moyenne de l'impulsion dans le mouvement de Fermi est de l'ordre de 200 MeV/c, si bien que l'absorption sur un seul nucléon⁽¹⁰⁾ est peu probable.

En général le phénomène concerne deux nucléons qui possèdent après l'interaction des impulsions voisines de 350 MeV/c et s'éloignent dans des directions opposées⁽¹¹⁾. A titre d'exemple, Eckstein⁽¹²⁾ a montré que l'hypothèse d'absorption sur une paire de nucléons en corrélation et la connaissance des sections efficaces de production (phénomène inverse) permettent d'évaluer quantitativement les probabilités de

production des réactions :



Les réactions d'absorption sont généralement du type :



et les études de production relative des paires constituent un moyen d'investigation assez simple des corrélations puisque le projectile n'apparaît plus dans l'état final^(13,14).

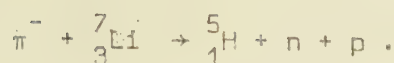
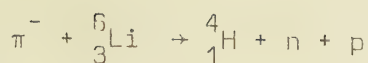
L'absorption des π^{-} de basse énergie se produit à partir d'orbitales de Bohr à des niveaux bien connus mais impose obligatoirement la détection d'un neutron au moins. L'absorption des π^{+} en vol est plus difficile à traiter théoriquement mais donne lieu à des expériences qui peuvent produire deux protons. On peut signaler par exemple la réaction



qui doit permettre de dire dans quelle mesure le ${}^6_3\text{Li}$ est constitué des "clusters" ${}^4_2\text{He} + {}^2_1\text{H}$ et peut apporter une réponse au problème des états excités de ${}^4_2\text{He}$ (17).

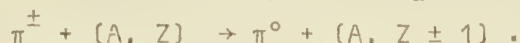
On sait par les expériences de diffusion quasi-élastique nucléon-nucléon, où le reste du noyau est seulement spectateur, que le modèle en couches est valable pour des excitations correspondant à la création d'une paire trou-particule, mais il est peu probable que ce modèle ait encore un sens lorsqu'on enlève plusieurs nucléons au noyau. Les états correspondant à deux paires trou-particule sont forcément très instables mais il serait intéressant de les observer et d'en déduire des informations sur les interactions résiduelles.

Ajoutons que les réactions d'absorption fournissent le moyen d'obtenir des noyaux remarquables, par exemple :

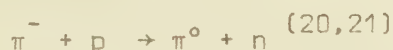


3) Le pion possède trois états de charge qui lui permettent de produire des réactions d'échange par lesquelles on peut obtenir des multiplets intéressants.

Le π^0 ne peut pas être utilisé comme sonde mais peut être détecté par ses produits de désintégration: ($\rightarrow 2 \gamma$ en 10^{-16} seconde) dans les réactions de simple échange de charges du type



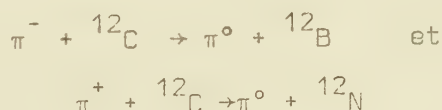
Ces réactions sont parmi les plus faciles à étudier par la technique d'activation^(18,19) mais n'ont pratiquement pas été exploitées, la plus étudiée étant :



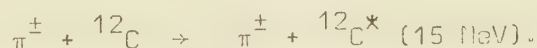
bien qu'on sache que des informations nucléaires doivent être obtenues en travaillant sur des noyaux complexes⁽²²⁾.

Actuellement Soergel et ses collaborateurs travaillent sur le multiplet ($T = 1$ états⁺)

${}^{12}_\text{B}$ (fondamental) ${}^{12}_\text{N}$ (fondamental) ${}^{12}_\text{C}^*$ (15 MeV) en mesurant les sections efficaces des réactions



qui devraient être identiques si on tient compte de l'effet coulombien en utilisant la réaction connue :



Le problème est de savoir si l'isospin est un bon nombre quantique dans le noyau.

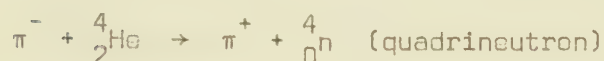
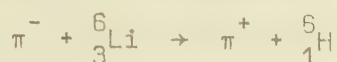
Les réactions de double échange de charges



donnent lieu à des événements parfaitement signés dans lesquels on peut obtenir des noyaux vraiment exceptionnels. On pense que le phénomène est très sensible au principe d'exclusion de Pauli si le modèle en couches est bien valable. Quelques études théoriques existent⁽²³⁾ et quelques expériences récentes ont été réalisées, soit au moyen des émulsions⁽²⁴⁾, soit par la technique des compteurs^(25,26), mais les sections efficaces sont

malheureusement très faibles et ce champ d'investigation semble réservé aux futures machines.

L'intérêt de ces réactions est particulièrement important dans le domaine des noyaux légers où on espère obtenir des noyaux vraiment "exotiques", par exemple :



et la réaction miroir donnant une étoile spectaculaire



La possibilité de ces observations est très controversée.

4) Les π^- lents sont facilement capturés en orbite de Bohr et cascaden ensuite de niveau en niveau jusqu'à ce qu'ils soient absorbés par le noyau. L'étude des rayons X émis est actuellement facilitée par le développement de la spectrométrie γ avec des détecteurs $\text{Ge}(\text{Li})$ et $\text{Si}(\text{Li})$ à haute performance. Dans ce domaine, l'intérêt essentiel des pions par rapport aux muons est que ces derniers sont seulement sensibles à la distribution de charge du noyau tandis que les pions sont sensibles à la matière nucléaire toute entière⁽²⁷⁾.

Un rayon égal à celui de l'orbite électronique K correspond au nombre quantique principal

$$n = \sqrt{m_\pi / m_e} = 17.$$

Les orbites mésiques sont donc très rapprochées du noyau de telle sorte que l'interaction forte devient sensible pour les faibles valeurs de n . Pratiquement, si Z n'est pas trop grand, le pion passe la plus grande partie de son temps en dehors du noyau et l'interaction forte peut être traitée comme une perturbation.

Jusqu'à quelques centaines de MeV l'interaction π -nucléon est dominée par les ondes s et p et l'effet des ondes d'ordre plus élevé est négligeable. Dans ces conditions le déplacement des raies et leur largeur peuvent s'interpréter par un potentiel de Kisslinger⁽²⁸⁾ comportant en plus du terme local, un terme gradient non local

$V(r) = V_0 \rho(r) + V_1 \vec{\nabla} \rho(r) \cdot \vec{\nabla}$, où V_0 et V_1 sont des grandeurs complexes reliées théoriquement à l'interaction π -nucléon.

Les variations observées sont essentiellement l'apanage des orbites $n = 1 + 1$ (classiquement, ce sont les plus excentrées).

Les déplacements et élargissements des niveaux ^1S sont principalement dus à l'interaction en onde s qui est répulsive (diminution de l'énergie de liaison).

Les déplacements et élargissements des niveaux ^2P , ^3D sont principalement dus à l'interaction en onde p qui est attractive (augmentation de l'énergie de liaison).

Les déplacements correspondent aux paramètres réels du potentiel. Les élargissements et les atténuations d'intensité correspondent aux paramètres imaginaires d'absorption.

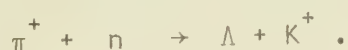
La théorie élaborée de Ericson et Ericson⁽²⁹⁾ est essentiellement un traitement de diffusion multiple qui suppose une interaction de courte portée et tient compte des corrélations nucléon-nucléon, des effets d'absorption, du mouvement de Fermi... C'est un premier pas vers une compréhension théorique quantitative de l'interaction pion-noyau à basse énergie.

Depuis quelques années des mesures systématiques sur les atomes π -mésiques sont effectuées par plusieurs groupes, en particulier Jenkins à Berkeley⁽³⁰⁾ et Backenstoss au CERN⁽³¹⁾.

Il faut remarquer que l'interaction pion-noyau joue seulement un rôle secondaire dans ce domaine des basses énergies puisque les niveaux atomiques sont essentiellement définis par les forces électromagnétiques.

5) Dans le domaine des hautes énergies ~ 1 GeV, les expériences les plus courantes concernent les diffusions $\pi^- p$, $\pi^- ^2_1H$ et $\pi^- ^4_2He$. On peut citer par exemple^(32,33,34) et les références incluses. A ces énergies la théorie de diffusion cohérente de Glauber⁽³⁵⁾ est applicable aussi bien pour le nucléon que pour le pion.

Il y a cependant des applications spécifiques des pions. Par exemple Tanner⁽³⁶⁾ a proposé d'étudier des hypernoyaux Λ à partir du spectre de mésons produits dans la réaction :



Une idée très intéressante est d'étudier des résonances ayant une durée de vie de l'ordre de 10^{-23} seconde (parcours de quelques fermis) en observant leur comportement dans le noyau même où elles sont

créées. Plusieurs travaux théoriques^(37,38) ont montré que les résultats observables sont sensibles à la section efficace totale de diffusion particule-nucléon. Ainsi Margolis⁽³⁹⁾ calcule la section efficace totale de diffusion ρ^0 -nucléon à partir de mesures de production (où on observe en fait la paire finale $\pi^+ \pi^-$).

A haute énergie, les problèmes de structure nucléaire et de particules élémentaires deviennent inséparables. Il est encore trop tôt pour discuter sérieusement des options à prendre.

C. Intérêt de la diffusion π -noyau

Les expériences de diffusion pion-noyau dans le domaine des moyennes énergies sont celles qui devraient normalement fournir le plus d'informations nucléaires. Elles sont malheureusement rares et, lorsqu'elles existent, trop particulières. On ne s'est jamais préoccupé de faire varier systématiquement sur de larges bandes les paramètres cinématiques, énergie et angle, non plus que la nature du noyau cible.

A vrai dire ces études ne sont pas faciles puisque les faisceaux de pions usuellement disponibles donnent $\sim 10^4$ à 10^5 pions par seconde avec des définitions en énergie aussi mauvaises que 10 %.

1. Le seul domaine où les mesures soient relativement abondantes est celui de la diffusion pion ${}^4_2\text{He}$, ce qui est dû à l'impulsion donnée par Sternheim et Hofstadter⁽⁴⁰⁾ qui ont proposé de mesurer le facteur de forme du pion en comparant la diffusion élastique des $\pi^\pm$ sur ${}^4_2\text{He}$ dans la région du minimum de diffraction.

L'intérêt particulier de ${}^4_2\text{He}$ vient de ce qu'il s'agit d'un noyau relativement simple où les nucléons sont en onde s, noyau très étudié théoriquement, et de ce que le premier niveau excité se situe vers 20 MeV et peut être très facilement séparé du niveau élastique. On peut citer plusieurs expériences déjà réalisées^(41,42,43) mais qui ne résolvent pas encore la question^(44,45).

Les difficultés viennent en fait d'un autre problème qui est celui de l'interférence des contributions coulombienne et nucléaire. En première approximation on peut écrire la section efficace

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_C(\theta) + f_N(\theta)|^2 \quad \text{en faisant la somme des amplitudes}$$

coulombienne et nucléaire, soit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = [f_C + R(f_N)]^2 + [I(f_N)]^2 \quad \text{ou encore,}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_N + 2 \sin\delta \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_N} \quad \text{avec}$$

$$\tan \delta = R(f_N)/I(f_N).$$

La "soustraction" de l'effet coulombien nécessite une expérimentation et une analyse extrêmement soignées. L'intérêt théorique du phénomène en soi est considérable.

2. L'interaction pion-noyau au-dessus de 100 MeV pose un problème théorique important et pour lequel on n'a pratiquement aucune base de travail : l'influence de la résonance $\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)$ π -nucléon à 190 MeV. En fait l'énergie de cette résonance est très élargie dans le système du laboratoire à cause du mouvement de Fermi. Dans le système du centre de masse de l'ensemble pion-nucléon, l'énergie de la résonance est obtenue pour :

$$\left[\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} + \sqrt{m_N^2 + p_N^2} \right]^2 - [p_\pi - p_N]^2 = [1236]^2.$$

$$\text{Si } p_N = 0 \text{ on trouve } p_\pi = 300 \text{ MeV/c (190 MeV),}$$

$$\text{Si } p_N = \pm 300 \text{ MeV/c } p_\pi = 200 \text{ ou } 420 \text{ MeV/c}$$

$$\text{ce qui correspond à } T_\pi = 100 \text{ ou } 300 \text{ MeV.}$$

Le problème ne peut pas être esquivé car il est fondamental et il existe deux autres résonances au-dessous de 1 GeV. Une méthode rationnelle consiste à partir de la zone d'application du potentiel de Ericson et Ericson, c'est-à-dire qu'il faut s'appuyer sur la base sûre des résultats obtenus par l'étude des atomes π -mésiques. La détermination des paramètres optiques doit être effectuée en procédant de façon continue, des basses énergies vers les énergies plus élevées.

On sait déjà que les résultats obtenus au voisinage de 20 MeV (46,47) sont en parfait accord avec les prévisions. Malheureusement, les "fits" mathématiques deviennent extrêmement délicats à trouver lorsque l'énergie augmente. A titre d'exemple, les analyses des résultats de Rainwater et al par les auteurs eux-mêmes⁽⁴⁸⁾ et par Beinhart et Huguenin⁽⁴⁹⁾ sont en partie contradictoires, bien que les énergies inférieures à 100 MeV nécessitent encore peu de paramètres.

Le problème qui se pose au voisinage de la résonance est de réaliser une interprétation théorique à partir de l'interaction élémen-

taire pion-nucléon et d'en déduire de nouvelles propriétés nucléaires. On peut s'attendre à un effet de Lorentz-Lorenz venant de ce que le champ effectif est modifié par réaction du milieu en présence de la particule. L'interaction pion-nucléon en présence d'autres nucléons pose aussi la question de l'existence possible d'interactions à trois corps. Enfin le problème de l'influence de la résonance dans un noyau complexe implique celui de la création et du comportement du N^* dans la matière nucléaire. On voit que le domaine de recherche est immense et on comprend que le manque de données se fasse sentir.

Si la résonance pion-nucléon est le phénomène dominant autour de 190 MeV, la partie réelle de l'amplitude de diffusion doit être pratiquement nulle et on doit observer une déformation notable des courbes de section efficace différentielle dans la zone angulaire où les amplitudes Coulombienne et nucléaire sont du même ordre de grandeur. On s'attend à une interférence constructive au-dessous de la résonance et destructive au-dessus de la résonance en supposant que le caractère attractif ou répulsif de l'interaction π -nucléon soit conservé dans le noyau (on sait qu'à énergie nulle cette propriété dépend du nombre de nucléons).

3. Une motivation importante pour réaliser des expériences de diffusion à haute résolution est qu'il est nécessaire de séparer les contributions élastique et inélastique. Par ailleurs les sections efficaces inélastiques sont intéressantes en elles-mêmes, bien qu'on ne dispose d'aucune théorie applicable, en dehors du modèle diffractif simpliste de Blair⁽⁵⁰⁾ qui est presque phénoménologique.

A transfert d'énergie égal le transfert d'impulsion du pion est inférieur à celui du nucléon et il faut s'attendre à obtenir préférentiellement des états excités collectifs (où plusieurs nucléons sont portés dans les premiers niveaux libres). Une particularité remarquable des pions dans ce domaine est que, possédant un isospin $T = 1$, il leur est possible, en agissant par exemple sur un noyau à l'état fondamental $T = 0$, d'exciter des états $T = 1$ et $T = 2$ par le canal T (total) $= 1$. Il serait très intéressant d'observer ces états, en particulier sur ${}^4_2\text{He}$.

D. Notre expérience

En 1965 au CERN, notre groupe proposait d'étudier la diffusion des pions sur noyaux légers aux énergies des pions disponibles auprès du Synchrocyclotron à protons de 600 MeV (au voisinage de la résonance) en réalisant un faisceau très soigné du point de vue optique.

Aucune mesure n'avait été faite au-dessus de 150 MeV⁽⁵¹⁾ et la meilleure résolution obtenue était de 6 MeV⁽⁵²⁾.

Les motivations d'une telle expérience ont été données dans le paragraphe précédent. Sa mise en place devait permettre l'étude systématique de plusieurs noyaux dans une gamme d'énergie où il est particulièrement important de connaître l'évolution du potentiel optique.

L'expérience nécessitait la mise en place de deux dispositifs optiques :

- un transport de faisceau à énergie variable permettant d'amener les pions produits sur une cible interne jusqu'à un collimateur situé au milieu du mur de protection de la machine,

- Dans la salle d'expérience, un double spectromètre achromatique permettant d'utiliser tout le spectre d'énergie passant par le collimateur. Un tel système comporte un monochromateur qui disperse le spectre sur la cible à étudier et un analyseur en opposition de déviation qui focalise sur un hodoscope terminal.

L'installation était terminée et testée en 1966 :

- le transport de faisceau est utilisable entre 100 et 300 MeV (il a déjà servi à plusieurs autres expériences). Il permet de focaliser $10^5 \pi^-$ par seconde dans une bande d'énergie ~ 3 MeV et sur une surface ~ 1 cm². On peut travailler en π^+ entre 100 et 150 MeV où les intensités sont 10 fois plus faibles puisqu'on est obligé de prendre les particules émises vers l'arrière à partir de la cible interne.

- Le double spectromètre achromatique a une résolution intrinsèque de l'ordre de 1/1000 qui ne fut jamais complètement utilisée jusqu'à maintenant. La plupart des mesures furent effectuées en 1967 et 1968 avec une résolution effective (non encore atteinte) de l'ordre du MeV.

En fait, cette expérience a porté uniquement sur le ^{12}C (une deuxième proposition d'expérience a été faite en 1969 pour ^4He). Nous avons choisi le carbone parce que c'est un noyau relativement simple, à spin et isospin nuls et pour lequel plusieurs études sérieuses ont été faites à basse énergie : voir références dans Auerbach⁽⁵³⁾. Par ailleurs le premier niveau excité est à 4,4 MeV et nous étions les premiers à pouvoir les séparer facilement. Enfin, la fabrication d'une cible de carbone ne présente aucune difficulté technique.

Le programme expérimental concernait essentiellement la mesure des sections efficaces différentielles élastique et inélastique pour

plusieurs énergies entre 100 et 300 MeV, à des angles variant de 0 à 140°. En "sous-produit", nous pensions observer et étudier :

- Les interférences C.N. (vers 6 à 8°),
- Les diffusions quasi-élastiques particulièrement intéressantes sur des sous-structures de quelques nucléons.

Seule la partie principale du programme a été réalisée pour la diffusion élastique et les niveaux excités de 4,4, 7,7, 9,6, 15,1 MeV. Les interférences ont été observées mais les problèmes de bruit de fond et de diffusion multiple ne nous ont pas permis une analyse sérieuse du phénomène qui sera reprise dans notre prochaine expérience. Nous avons abandonné les diffusions quasi-élastiques.

Par contre, il nous est apparu nécessaire, en particulier pour des questions de cohérence interne de nos mesures en vue de l'analyse physique, de procéder à la détermination précise des sections efficaces totales de diffusion.

Le présent mémoire concerne la description de cette expérience, et la discussion de ses résultats. Il comporte trois parties principales :

- description et théorie du faisceau ;
- mesures et traitement des données ;
- analyse physique et conclusions.

P R E M I E R E P A R T I E

DESCRIPTION ET THEORIE DU FAISCEAU

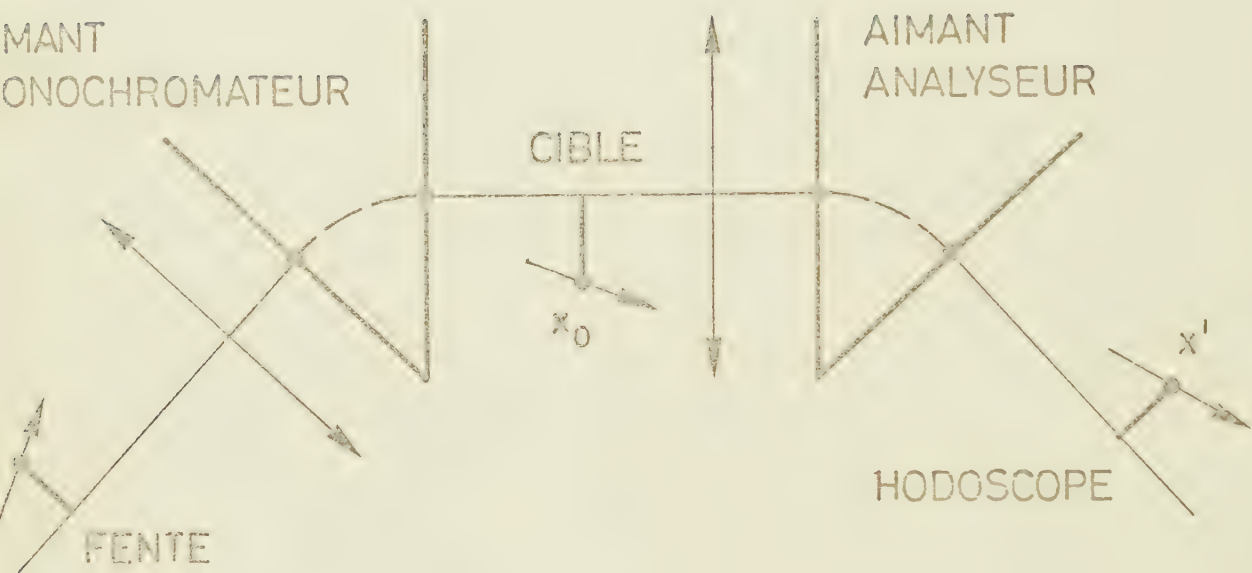


FIG. 1

C H A P I T R E I

DOUBLE SPECTROMETRE ACHROMATIQUE - THEORIE AU 1er ORDRE

A. Description de principe

Un double spectromètre achromatique comporte deux parties : un monochromateur et un analyseur. Chacune de ces parties possède un aimant de déflexion et dans le cas général un système de lentilles (Figure 1).

Le monochromateur transporte les particules depuis une fente-source jusqu'à une cible dans laquelle se produisent les interactions.

Une particule partant du centre de la fente et possédant la quantité de mouvement de réglage p arrive au milieu de la cible. Pour un point de départ à la distance x du centre et une quantité de mouvement $p + \Delta p$, l'écart observé sur la cible est de la forme :

$$x_0 = -Kx + M \frac{\Delta p}{p}.$$

L'analyseur prend les particules diffusées dans la cible et les amène sur un hodoscope qui localise leur passage. Soit $(\frac{\Delta p}{p})_0$ la perte de quantité de mouvement résultant d'une interaction particule-noyau. Le fonctionnement de l'analyseur étant tout à fait analogue à celui du monochromateur, on peut écrire pour la déviation sur l'hodoscope :

$$x' = -K'x_0 + M' \left[\frac{\Delta p}{p} + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0 \right], \text{ soit}$$

$$x' = K'Kx + (M' - K'M) \frac{\Delta p}{p} + K'M \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0.$$

L'ensemble du spectromètre est achromatique si $M' = K'M$, auquel cas

$$x' = K'Kx + K'M \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0.$$

On voit comment, si on suppose la fente assez fine, la connaissance de x' implique celle de $(\frac{\Delta p}{p})_0$.

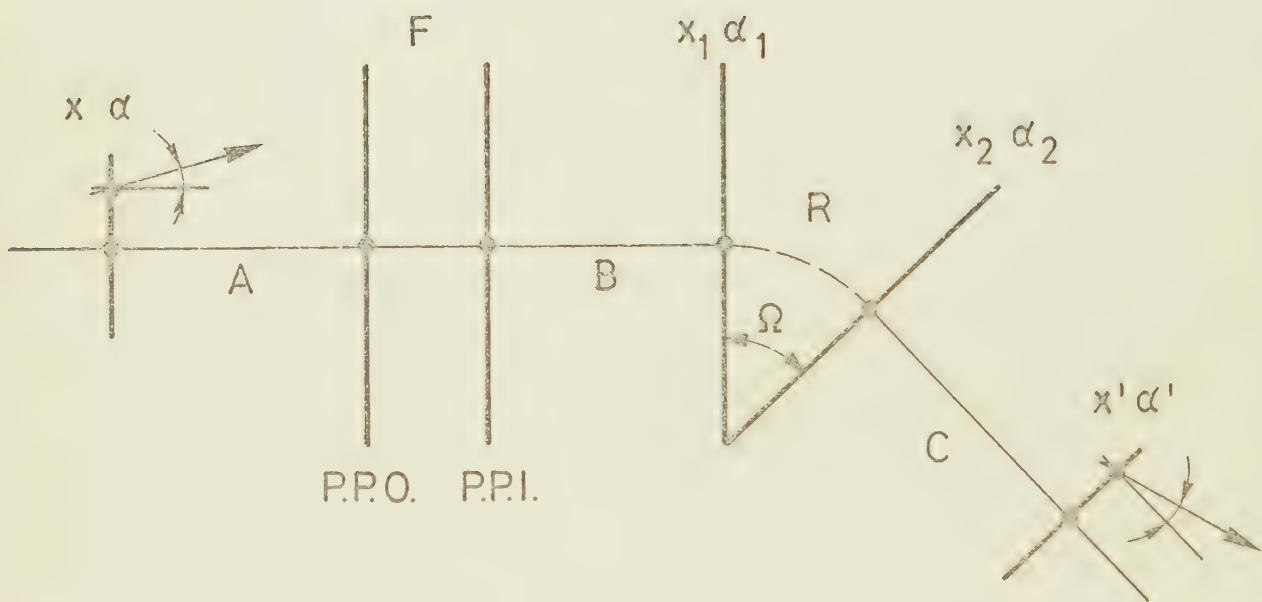


FIG. 2

Ainsi la distribution sur les compteurs de l'hodoscope permet d'évaluer les sections efficaces de diffusion pour différents niveaux d'excitation.

L'appareil est achromatique en ce sens qu'il accepte de travailler avec toute une gamme de quantités de mouvement autour de la valeur moyenne p .

B. Etude des trajectoires

Etant donné que le monochromateur et l'analyseur fonctionnent de la même manière (dans notre expérience les lentilles et les aimants sont identiques) nous nous contenterons pour l'instant d'étudier une des deux parties du spectromètre. Portons notre attention sur l'analyseur.

1. Focalisation horizontale d'une optique lentilles-aimant

Dans ce qui suit nous considérons des trajectoires contenues dans le plan de symétrie horizontal du système.

Nous allons suivre, depuis la cible jusqu'à l'hodoscope, une trajectoire voisine de la trajectoire moyenne en désignant par x le déplacement, α l'angle et $\frac{\Delta p}{p}$ l'écart relatif en quantité de mouvement.

Représentons les plans principaux du système focalisant (distance focale F) et le zone de champ magnétique correspondant à l'aimant (rayon de courbure R , angle Ω). Prenons les notations de la Figure 2.

Les transferts à travers le système focalisant, le secteur magnétique et l'espace libre C satisfont aux relations :

$$x_1 = x \frac{F - B}{F} + \alpha \left(A + B - \frac{AB}{F} \right)$$

$$\alpha_1 = -\frac{x}{F} + \alpha \frac{F - A}{F} ,$$

$$x_2 = x_1 \cos \Omega + \alpha_1 R \sin \Omega + \frac{\Delta p}{p} R (1 - \cos \Omega)$$

$$\alpha_2 = -\frac{x_1}{R} \sin \Omega + \alpha_1 \cos \Omega + \frac{\Delta p}{p} \sin \Omega ,$$

$$x' = x_2 + \alpha_2 C$$

$$\alpha' = \alpha_2 .$$

En faisant le produit des matrices, on trouve :

$$x' = -\frac{x}{F} \left[(R \sin \Omega + C \cos \Omega) + (F-B) \left(\frac{C}{R} \sin \Omega - \cos \Omega \right) \right]$$

$$+ R \frac{\Delta p}{p} \left[1 - \left(\frac{C}{R} \sin \Omega - \cos \Omega \right) \right] + D \frac{\alpha}{F} , \quad \text{avec}$$

$$D = (F-A)(R \sin \Omega + C \cos \Omega) - [F^2 - (F-A)(F-B)] \left(\frac{C}{R} \sin \Omega - \cos \Omega \right) , \text{ et}$$

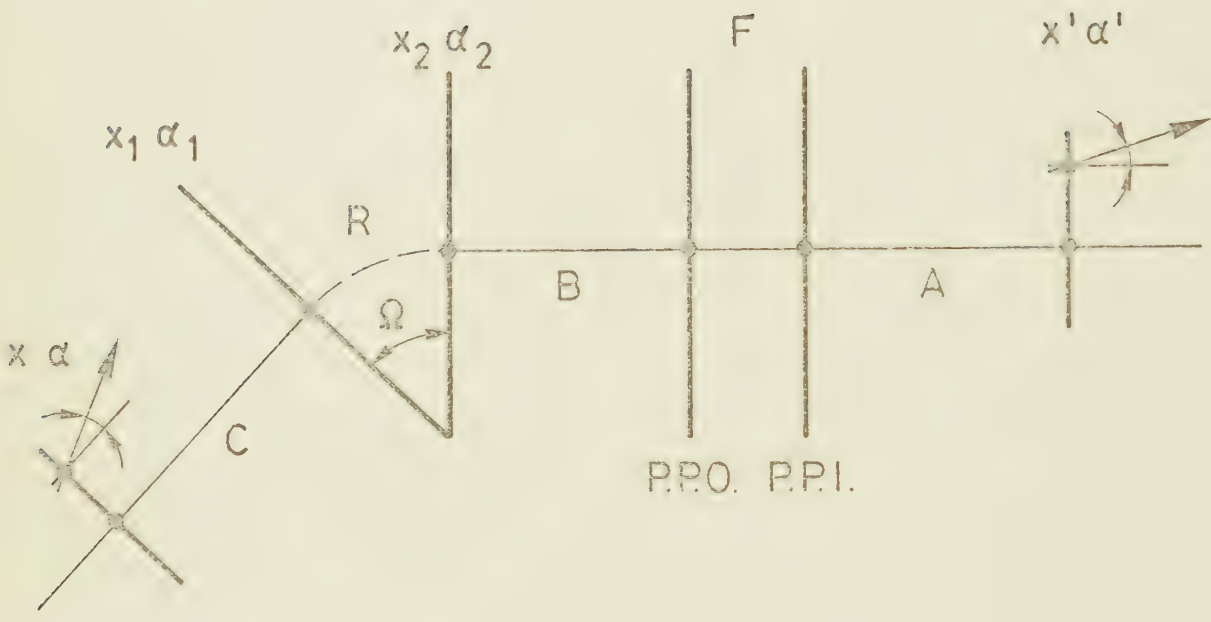


FIG. 3

$$\alpha' = - \frac{x}{F} \left[(F-B) \frac{\sin \Omega}{R} + \cos \Omega \right] + \frac{\Delta p}{p} \sin \Omega$$

$$- \frac{\alpha}{F} \left[[F^2 - (F-A)(F-B)] \frac{\sin \Omega}{R} - (F-A) \cos \Omega \right] .$$

La condition d'imagerie est $D = 0$.

Dans la pratique on fait $F-A = 0$, le plan initial du système étant le plan focal objet. Il en résulte la condition

$$C = \frac{R}{\operatorname{tg} \Omega} \text{ qui donne la position de l'hodoscope.}$$

Dans ces conditions on peut écrire à nouveau les relations générales :

$$x' = -x \frac{R}{F \sin \Omega} + R \frac{\Delta p}{p} , \text{ et}$$

$$\alpha' = - \frac{x}{F} \left[(F-B) \frac{\sin \Omega}{R} + \cos \Omega \right] + \frac{\Delta p}{p} \sin \Omega - \alpha \frac{F \sin \Omega}{R} .$$

On voit que la première relation est bien du type envisagé plus haut.

2. Comparaison avec une optique aimant-lentilles

On peut se demander s'il n'est pas possible d'utiliser une optique où l'ordre des éléments serait inversé.

Prenons les notations de la Figure 3.

On trouve :

$$x' = - \frac{x}{F} \left[[F^2 - (F-A)(F-B)] \frac{\sin \Omega}{R} - (F-A) \cos \Omega \right]$$

$$+ \frac{R}{F} \frac{\Delta p}{p} \left[[F^2 - (F-A)(F-B)] \frac{\sin \Omega}{R} + (F-A)(1 - \cos \Omega) \right]$$

$$+ D \frac{\alpha}{F} \text{ (même expression de D).}$$

$$\alpha' = - \frac{x}{F} \left[(F-B) \frac{\sin \Omega}{R} + \cos \Omega \right]$$

$$+ \frac{R}{F} \frac{\Delta p}{p} \left[(F-B) \frac{\sin \Omega}{R} - (1 - \cos \Omega) \right]$$

$$- \frac{\alpha}{F} \left[(R \sin \Omega + C \cos \Omega) + (F-B) \left(\frac{C}{R} \sin \Omega - \cos \Omega \right) \right] .$$

Les conditions $F-A = 0$ et $C = \frac{R}{\operatorname{tg} \Omega}$ donnent alors

$$x' = -x \frac{F \sin \Omega}{R} + R \frac{\Delta p}{p} \frac{F \sin \Omega}{R} , \text{ et}$$

$$\alpha' = - \frac{x}{F} \left[(F-B) \frac{\sin \Omega}{R} + \cos \Omega \right]$$

$$+ \frac{R}{F} \frac{\Delta p}{p} \left[(F-B) \frac{\sin \Omega}{R} - (1 - \cos \Omega) \right] - \alpha \frac{R}{F \sin \Omega} .$$

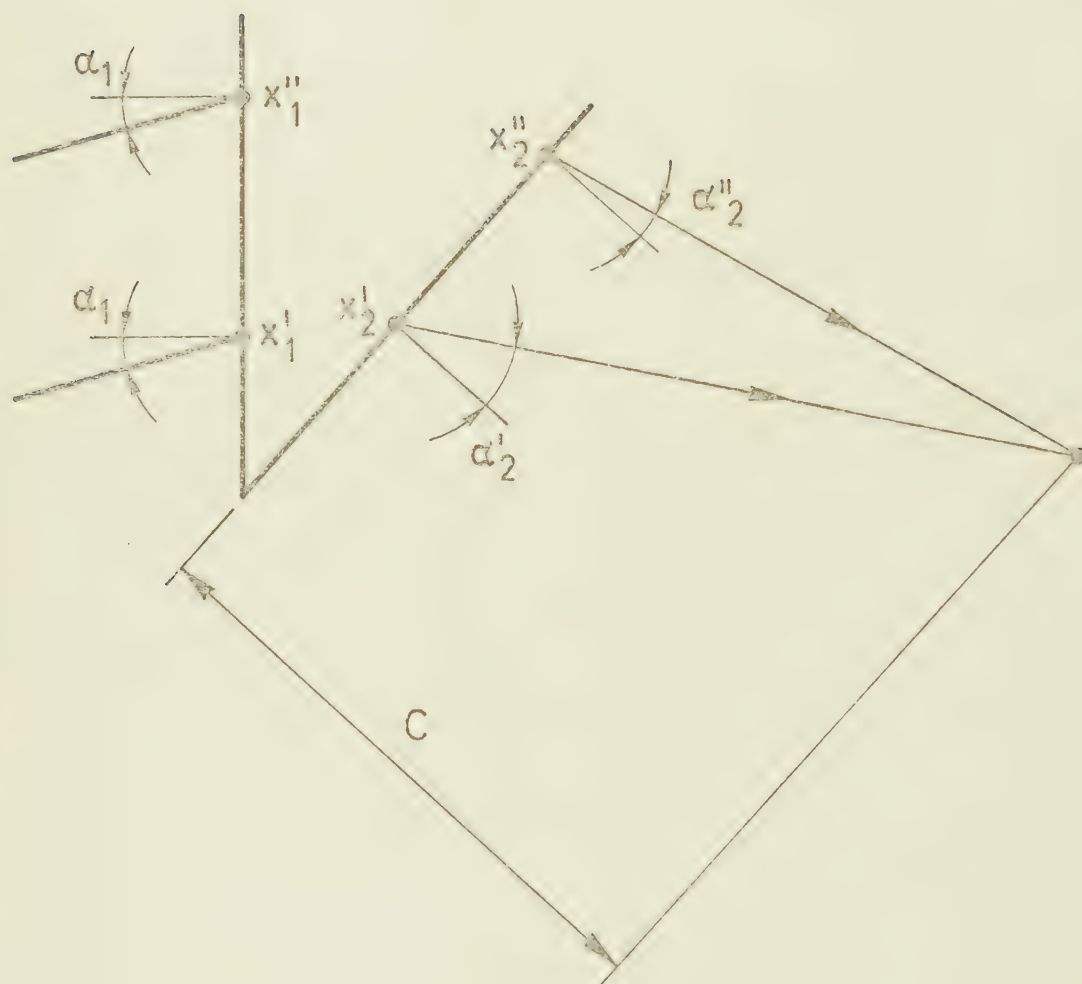


FIG. 4

Le système lentilles-aimant possède sur le système aimant-lentilles un avantage indéniable :

En cas de mauvais réglage des lentilles, ou si les courants dérivent en cours de mesures, il peut se faire qu'on ait

$F - A \neq 0$, mais comme

$C = \frac{R}{\operatorname{tg} \Omega}$ reste fixe, dans le cas du système lentilles-aimant la dispersion ne varie pas (coefficient de $\frac{\Delta p}{p}$). Ceci facilite l'identification des pics inélastiques dont la position moyenne (correspondant à $x = \alpha = 0$) demeure constante.

Par ailleurs, il est essentiel de pouvoir déplacer sans erreur la distribution sur l'hodoscope. A cet effet on fait varier dans un certain rapport les champs magnétiques et en particulier le champ de l'aimant, qu'on contrôle par résonance magnétique nucléaire (méthode de Purcell). Tout se passe comme si la quantité de mouvement avait varié

de $\frac{\Delta p}{p} = - \frac{\Delta H}{H}$ et on observe un déplacement

$\Delta x' = - R \frac{\Delta H}{H}$ qui doit être parfaitement reproductible.

3. Disposition de l'hodoscope

Une source monochromatique en un point du plan focal objet donne après le système de lentilles un ensemble de trajectoires parallèles de direction α_1 . Prenons deux quelconques de ces trajectoires et calculons leur intersection après l'aimant (Figure 4).

Il vient :

$$x_2' = x_1' \cos \Omega + K \qquad \alpha_2' = - \frac{x_1'}{R} \sin \Omega + K',$$

$$x_2'' = x_1'' \cos \Omega + K \qquad \alpha_2'' = - \frac{x_1''}{R} \sin \Omega + K'.$$

On peut alors écrire

$$x_2' + \alpha_2' C = x_2'' + \alpha_2'' C \quad \text{qui donne} \quad C = \frac{R}{\operatorname{tg} \Omega}.$$

D'après la théorie au 1er ordre la focalisation s'effectue dans un plan perpendiculaire à l'axe moyen. Ceci est grossièrement faux. Ainsi dans notre expérience l'hodoscope est presque couché sur l'axe (angle $\sim 10^\circ$).

Nous mettons en évidence à ce propos la nécessité d'une théorie plus élaborée tenant compte des termes du 2ème ordre. Une telle théorie donne :

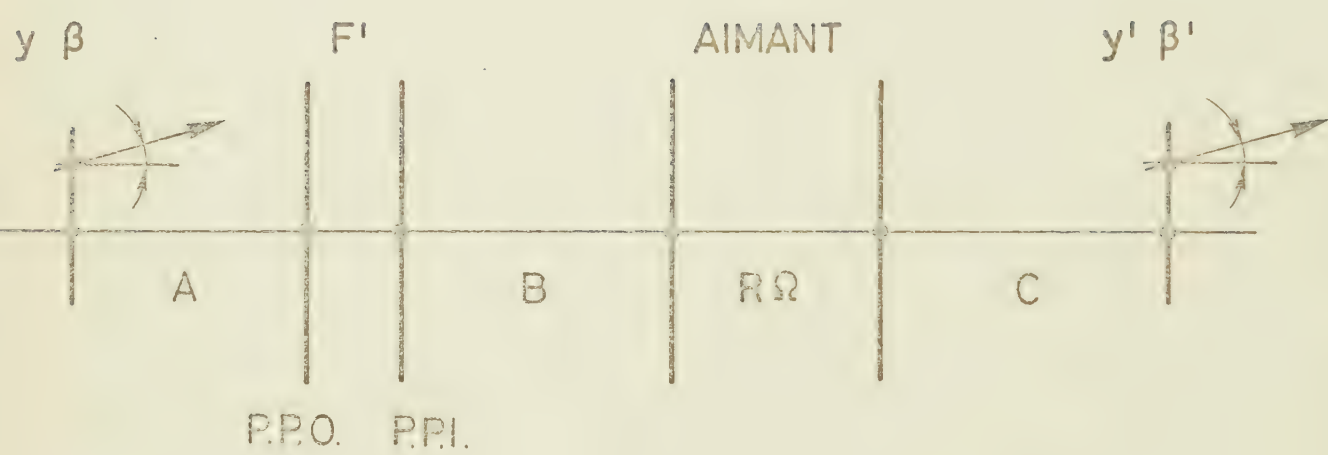


FIG. 5

$$\begin{aligned}
 x' = & x \left[\frac{\partial x'}{\partial x} \right]_0 + \alpha \left[\frac{\partial x'}{\partial \alpha} \right]_0 + \Delta p \left[\frac{\partial x'}{\partial \Delta p} \right]_0 \\
 & + \frac{x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} \right]_0 + \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial \alpha^2} \right]_0 + \frac{\Delta p^2}{2} \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial \Delta p^2} \right]_0 \\
 & + x\alpha \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial \alpha} \right]_0 + x \Delta p \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial \Delta p} \right]_0 + \alpha \Delta p \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial \alpha \partial \Delta p} \right]_0 .
 \end{aligned}$$

l'indice $_0$ signifiant que les dérivées sont calculées pour

$$x = \alpha = \Delta p = 0.$$

On peut alors calculer l'angle de l'hodoscope en écrivant la condition

$$\left| \frac{\partial^2 x'}{\partial \alpha \partial p} \right| = 0 .$$

Il est naturellement impossible d'obtenir cette relation par dérivation des coefficients appartenant au développement au 1er ordre.

4. Focalisation verticale

Dans ce qui suit nous considérons des trajectoires contenues dans la surface verticale $x = \alpha = 0$.

La matrice de transfert est très facile à obtenir car l'aimant ne produit aucune action sur le mouvement vertical au premier ordre. Tout se passe comme si on avait un espace sans champ, de longueur $R\Omega$.

Soit $F' \neq F$ la distance focale dans le plan vertical. Désignons, (Figure 5) par y le déplacement et β l'angle par rapport à la trajectoire moyenne ($\frac{\Delta p}{p}$ n'intervient pas dans la théorie au 1er ordre).

Si nous posons

$$P = A \text{ et } P' = B + R\Omega + C, \text{ il vient}$$

$$y' = y \frac{F' - P'}{F'} + \beta (P + P' - \frac{PP'}{F}) \text{ et}$$

$$\beta' = - \frac{y}{F'} + \beta \frac{F' - P}{F'} .$$

La condition d'imagerie $\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{F}$ permet d'écrire

$$y' = y \frac{F'}{F' - P} \text{ et } \beta' = - \frac{y}{F'} + \beta \frac{F' - P}{F'} .$$

Là encore nous verrons dans la théorie au 2ème ordre que la distance de focalisation C n'est pas constante et dépend en particulier de

$$\frac{\Delta p}{p} .$$

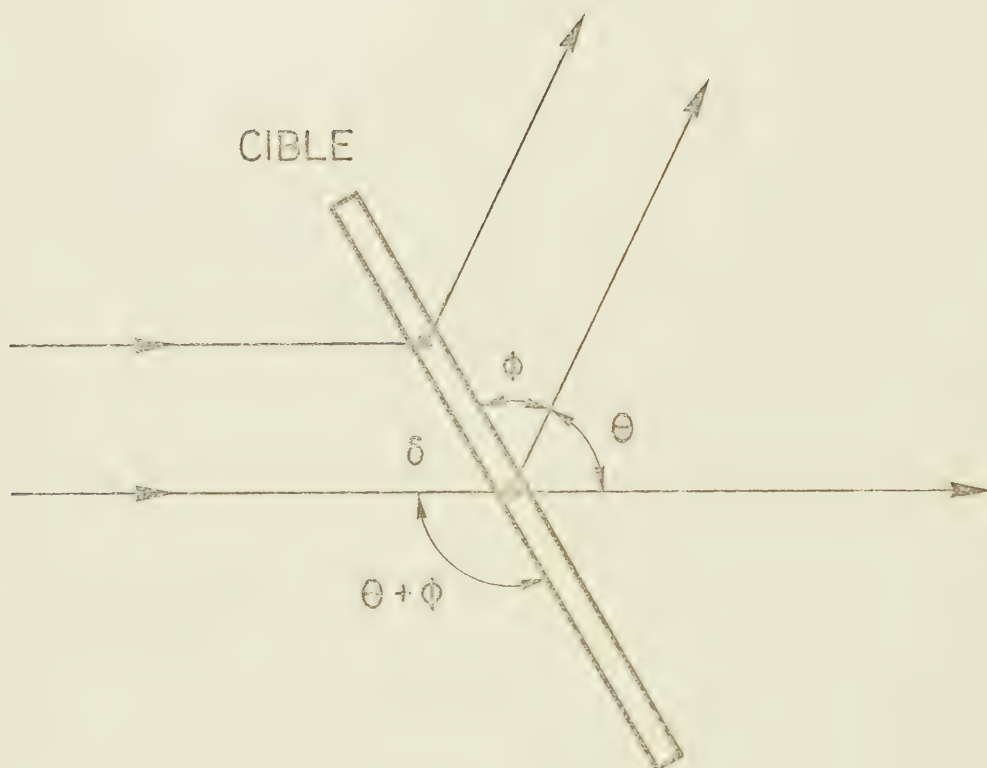


FIG. 6

C. Conditions d'achromatisme du double spectromètre

Nous pouvons reprendre le raisonnement fait tout au début de ce chapitre dans le cas où le monochromateur et l'analyseur se trouvent en vis-à-vis.

On peut maintenant préciser les notations et écrire :

$$x_0 = -x \frac{R_1}{F_1 \sin \Omega_1} + R_1 \frac{\Delta p}{p} \quad \text{et}$$

$$x' = -x_0 \frac{R_2}{F_2 \sin \Omega_2} + R_2 \left[\frac{\Delta p}{p} + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0 \right] \quad \text{soit}$$

$$x' = x \frac{R_1}{F_1 \sin \Omega_1} \frac{R_2}{F_2 \sin \Omega_2} + R_2 \frac{\Delta p}{p} \left[1 - \frac{R_1}{F_2 \sin \Omega_2} \right] + R_2 \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0.$$

On en déduit la condition d'achromatisme :

$$R_1 = F_2 \sin \Omega_2.$$

Dans le cas de notre spectromètre, on a :

$$R_1 = R_2 = 1,58 \text{ m} \quad \text{et}$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 35^\circ.$$

$F_2 = 2,755 \text{ m}$ est alors imposé, ainsi que $\frac{R_2}{F_2 \sin \Omega_2} = 1$, le grandissement de l'analyseur.

La première condition étant remplie, nous allons voir que l'achromatisme pour un angle de diffusion $\theta \neq 0$ exige en plus qu'on oriente la cible suivant un certain angle.

Prenons les notations de la Figure 6.

Avec une fente fine ($x = 0$) le monochromateur donne sur la cible

$$\delta \sin (\theta + \phi) = R_1 \frac{\Delta p}{p}$$

et l'analyseur donne sur l'hodoscope

$$x' = -\delta \sin \phi \frac{R_2}{F_2 \sin \Omega_2} + R_2 \left[\frac{\Delta p}{p} + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0 \right].$$

La condition d'achromatisme devient alors

$$\frac{\sin (\theta + \phi)}{\sin \phi} = \frac{R_1}{F_2 \sin \Omega_2} = 1, \quad \text{ou encore}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

La cible doit être orientée (au 1er ordre) suivant le plan bissecteur des faisceaux incident et diffusé.

Comme en fait $x \neq 0$, on a

$$x' = x \frac{R_2}{F_1 \sin \Omega_1} + R_2 \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0.$$

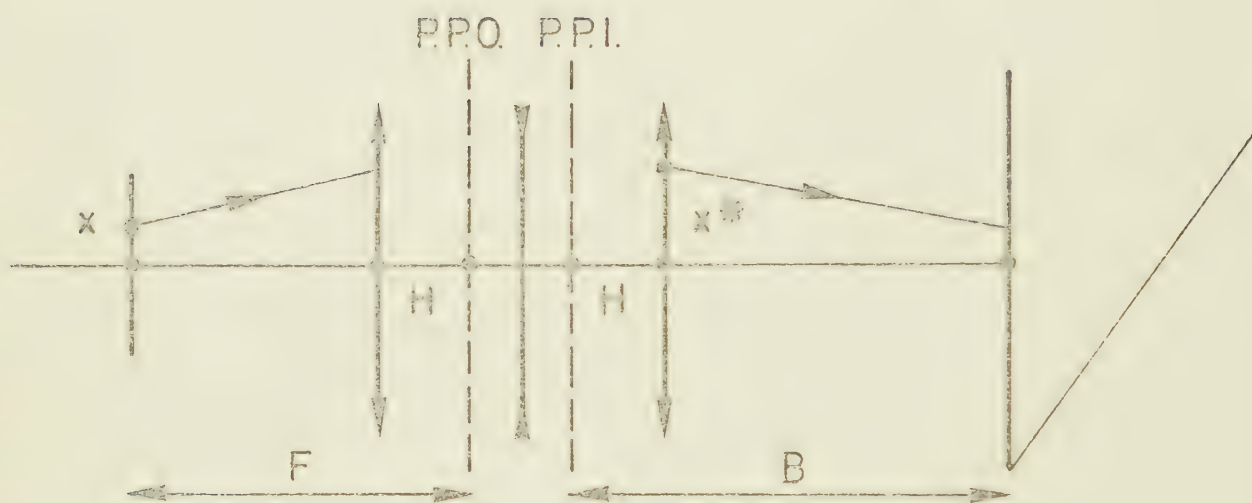


FIG. 7

Pour ne pas détériorer la résolution, on a évidemment intérêt à utiliser une fente assez fine et une distance focale du monochromateur F_1 assez importante.

Les conditions de chromatisme étant respectées, on voit que la cible est éclairée par un spectre étalé en quantité de mouvement, de telle sorte qu'en chaque point d'élongation δ on observe une valeur moyenne

$$\frac{\overline{\Delta p}}{p} = \frac{\delta \sin \phi}{F_2 \sin \phi_2} .$$

D. Effet de pupille. Efficacité de l'hodoscope

Portons à nouveau notre attention sur l'analyseur.

Le système focalisant avant l'aimant est constitué par un triplet symétrique constitué de quadrupôles de construction identique. Les deux quadrupôles extrêmes sont parcourus par le même courant et disposés symétriquement de part et d'autre du quadrupôle interne. Ce dernier est polarisé en sens inverse des deux autres, de telle sorte que l'ensemble se trouve dans l'état FDF pour le plan horizontal et DFD pour le plan vertical (F focalisant, D défocalisant).

Le tracé des trajectoires pour l'ensemble triplet-aimant montre que la pupille du système est constitué par l'ouverture du 3ème quadrupôle dans le plan horizontal, celle du 2ème quadrupôle dans le plan vertical. Le tube à vide utilisé tout le long du faisceau ne limite nulle part ailleurs ses dimensions transversales. Les conclusions sont naturellement les mêmes pour le monochromateur.

Prenons les notations de la Figure 7.

En partant de x et α , on trouve

$$\alpha^* = - \frac{x}{F} \quad \text{et}$$

$x^* = x \frac{F - H}{F} + \alpha F$. La condition $x^* = 0$ donne l'angle moyen d'émission des trajectoires qui passent effectivement à travers l'optique :

$$\overline{\alpha} = - \frac{x}{F} \frac{F - H}{F} = - \frac{\delta \sin \phi}{F} \frac{F - H}{F} .$$

Connaissant $\overline{\alpha}$ et $\frac{\overline{\Delta p}}{p}$ en chaque point de la cible, on peut calculer l'angle moyen sous lequel les particules venant de ce point parviennent au centre de l'hodoscope ($\frac{\overline{\Delta p}}{p}$ est compensé)

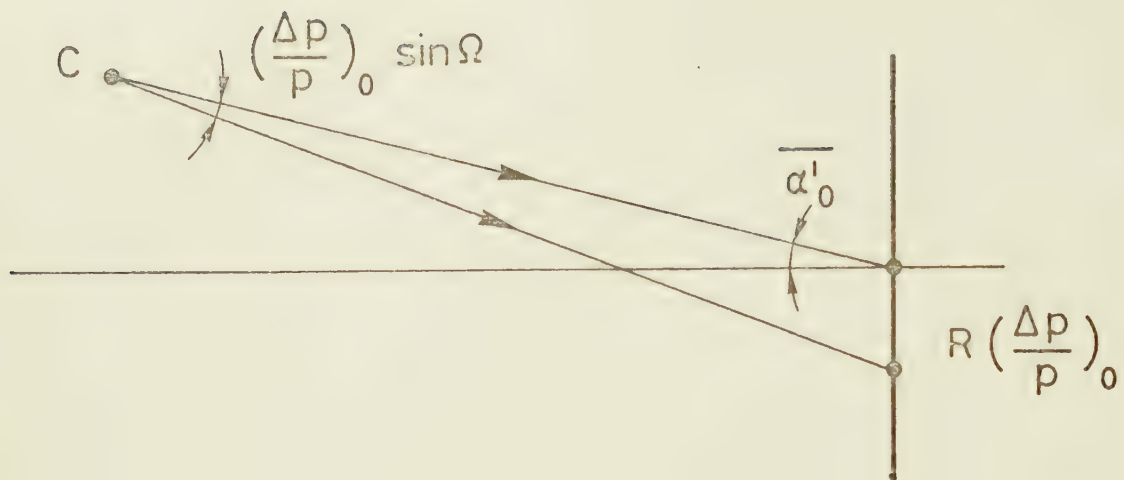


FIG. 8

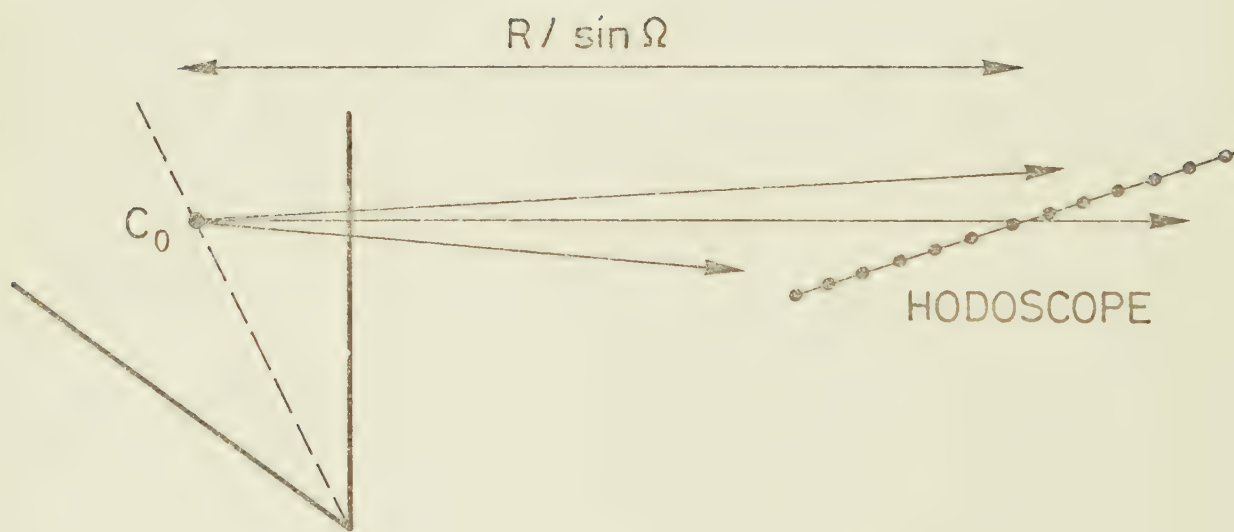


FIG. 9

$$\begin{aligned}\overline{\alpha'_0} &= - \frac{\delta \sin \phi}{F} \left[(F - B) \frac{\sin \Omega}{R} + \cos \Omega \right] + \frac{\overline{\Delta p}}{p} \sin \Omega - \overline{\alpha} \frac{F \sin \Omega}{R} \\ &= \frac{\delta \sin \phi}{F} \left[1 - \cos \Omega + \frac{\Delta}{R} \sin \Omega \right] ,\end{aligned}$$

Δ étant la distance physique entre la pupille et l'aimant.

Prenons le cas où la particule partant de δ a perdu $(\frac{\Delta p}{p})_0$ dans un choc inélastique. Supposons la direction $\overline{\alpha}$. On obtient sur l'hodoscope (Figure 8).

$$\alpha' = \overline{\alpha'_0} - \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_0 \sin \Omega$$

$$x' = - R \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_0 .$$

On voit que l'hodoscope est balayé par des trajectoires qui semblent provenir d'un centre C à la distance

$$\frac{R}{\sin \Omega} = F .$$

Si la cible n'est pas très large, les points C se trouvent au voisinage d'un point C_0 sur l'axe qui est situé dans le plan bissecteur de l'aimant (Figure 9).

Si maintenant on tient compte de l'inclinaison de l'hodoscope et de l'espacement régulier de ses canaux, on voit que l'hodoscope paraîtra plus ou moins transparent suivant l'inclinaison des trajectoires.

L'efficacité de l'hodoscope est fonction du numéro de canal envisagé et il faudra en tenir compte.

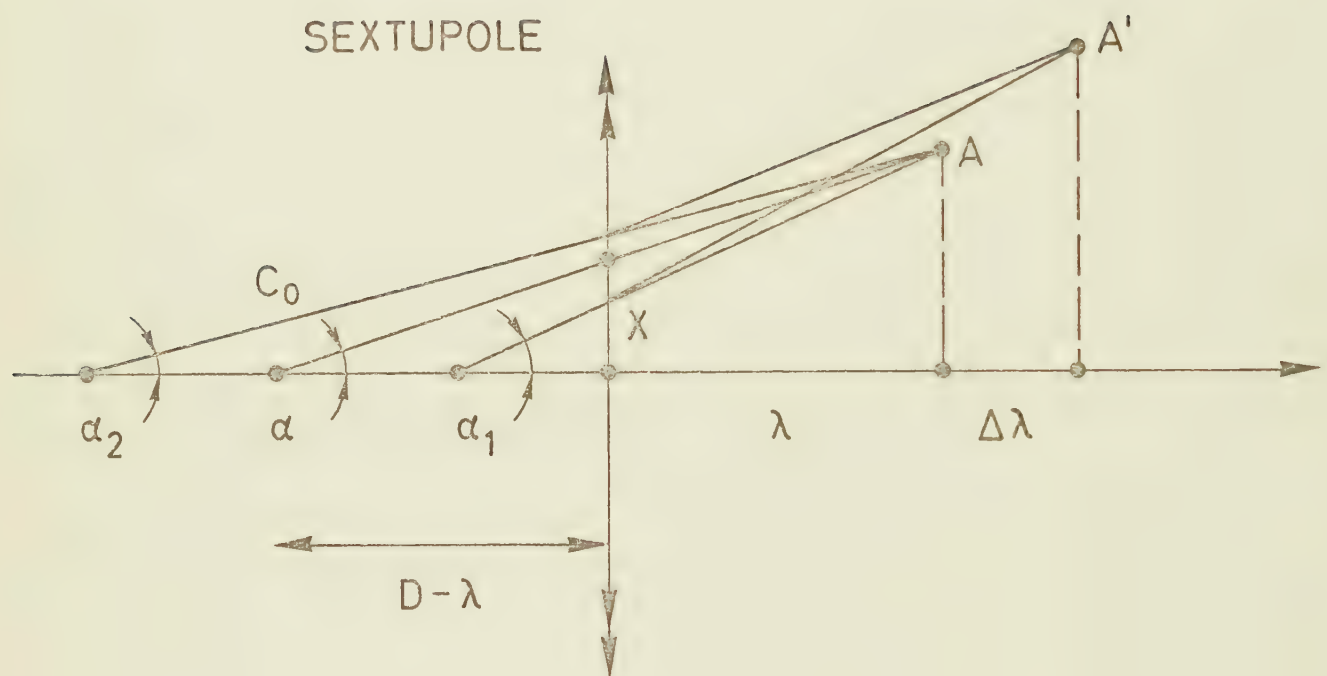


FIG.10

C H A P I T R E II

DOUBLE SPECTROMETRE ACHROMATIQUE : THEORIE AU 2ème ORDRE

A. Introduction des sextupôles

Lorsqu'on veut corriger les aberrations du 2ème ordre dans un faisceau, on peut utiliser des sextupôles dont la présence introduit justement des effets du 2ème ordre contrôlables.

La caractéristique essentielle d'un sextupôle est de se comporter comme une lentille dont la puissance varie en fonction du point de passage de la particule. Les déviations produites sont de la forme

$$\Delta\alpha = K(X^2 - Y^2) \text{ dans le plan horizontal,}$$

$$\Delta\beta = -2 K XY \text{ dans le plan vertical.}$$

A titre d'exemple, nous allons étudier ce qui se passe lorsqu'on dispose un sextupôle dans l'analyseur, entre l'aimant et l'hodoscope.

1. Effet dans le plan horizontal

Imaginons un ensemble de trajectoires focalisant en A avant l'introduction du sextupôle. On sait que ces trajectoires semblent provenir d'un point moyen C₀ situé dans le plan bissecteur de l'aimant à une distance

$$D = \frac{R}{\sin \Omega}.$$

Lorsqu'on met le sextupôle en place les trajectoires focalisent en A'.

On peut écrire, avec les notations de la Figure 10

$$\lambda = \frac{2 \Delta X}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{et} \quad \lambda + \Delta\lambda = \frac{2 \Delta X}{\alpha'_1 - \alpha'_2} \quad \text{avec}$$

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + K(X - \Delta X)^2 \quad \text{et}$$

$$\alpha'_2 = \alpha_2 + K(X + \Delta X)^2, \text{ d'où on déduit}$$

$$\Delta\lambda = 2 K \lambda^2 X = 2 K \lambda^2 (D - \lambda) \alpha,$$

α désignant l'angle moyen du faisceau

Soit θ l'angle que fait le plan de focalisation avec l'axe, sans sextupôle, et soit θ' la nouvelle valeur de cet angle, avec sextupôle (Figure 11).

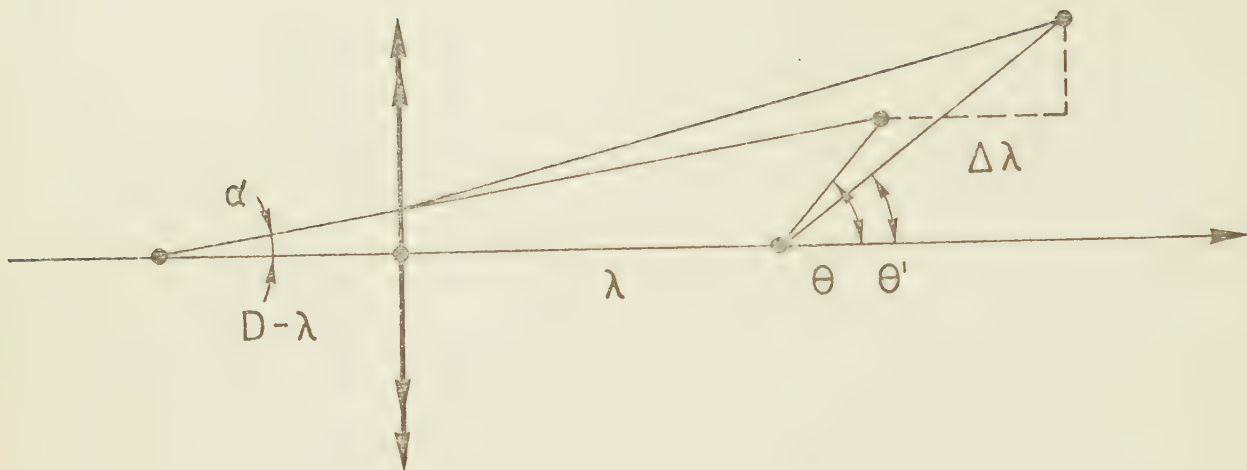


FIG. 11

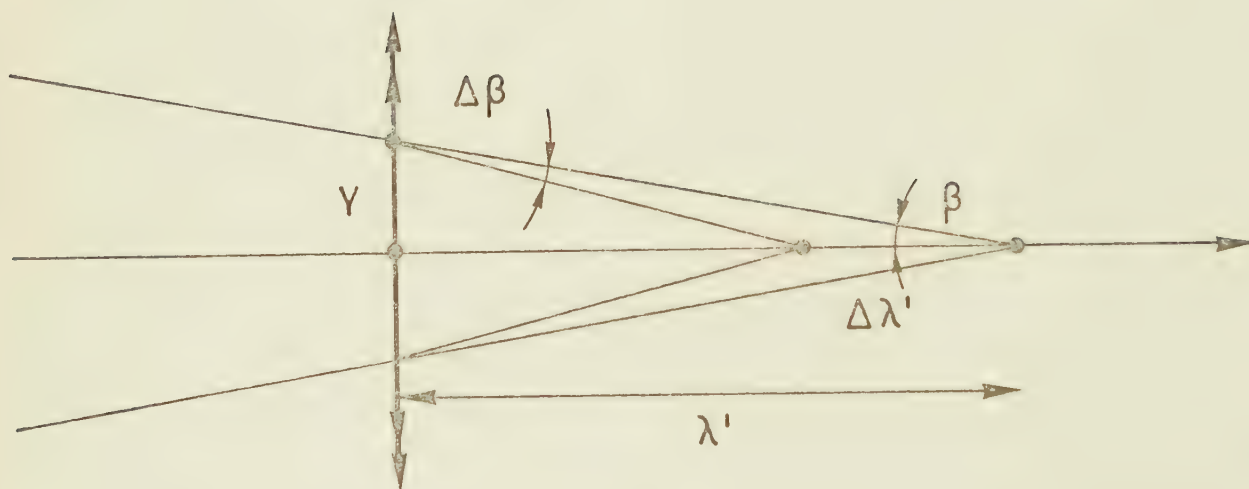


FIG. 12

Il vient :

$$\frac{D\alpha}{\operatorname{tg}\theta'} = \frac{D\alpha}{\operatorname{tg}\theta} + 2 K \lambda^2 (D - \lambda) \alpha, \text{ soit}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta'} - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = 2 K \lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega\right).$$

On voit que le sextupôle permet de faire varier l'angle θ et par conséquent de régler la focalisation des particules sur un hodoscope fixe.

Pour une rotation $\theta' - \theta$ donnée, la valeur minimale de K , donc le courant minimal dans le sextupôle, est obtenu pour

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{R}{\sin \Omega}.$$

2. Effet dans le plan vertical

Reprenons le même faisceau et étudions sa focalisation verticale. Ce faisceau est symétrique par rapport au plan horizontal xOz .

Prenons les notations de la Figure 12. Il vient :

$$\Delta\beta = -2 K X Y, \text{ et comme}$$

$$(\lambda' + \Delta\lambda')(\beta - \Delta\beta) = \lambda'\beta = Y,$$

$$\frac{\Delta\lambda'}{\lambda'} = \frac{\Delta\beta}{\beta} \quad \text{soit}$$

$$\Delta\lambda' = \lambda'^2 \frac{\Delta\beta}{Y} = -2 K \lambda'^2 X.$$

La condition de double focalisation

$$\lambda' = \lambda \text{ implique } \Delta\lambda' = -\Delta\lambda.$$

On voit que la rotation du plan de focalisation verticale s'effectue en sens inverse de celle du plan de focalisation horizontale, de telle sorte qu'il est en général impossible d'obtenir une double focalisation parfaite dans le plan de l'hodoscope.

Fort heureusement les scintillateurs de l'hodoscope sont des baguettes verticales suffisamment longues ($5 \times 5 \times 150$ mm) pour que la focalisation verticale intervienne peu.

B. Focalisation horizontale du spectromètre

Pour fixer les idées, nous conviendrons toujours de parler de l'analyseur.

Les notations utilisées sont indiquées sur la Figure 13. Nous prenons le cas général d'une cible et d'un hodoscope inclinés suivant des angles quelconques mais imposons à priori la distance

$$C = \frac{R}{\operatorname{tg} \Omega} \text{ entre l'aimant et les détecteurs.}$$

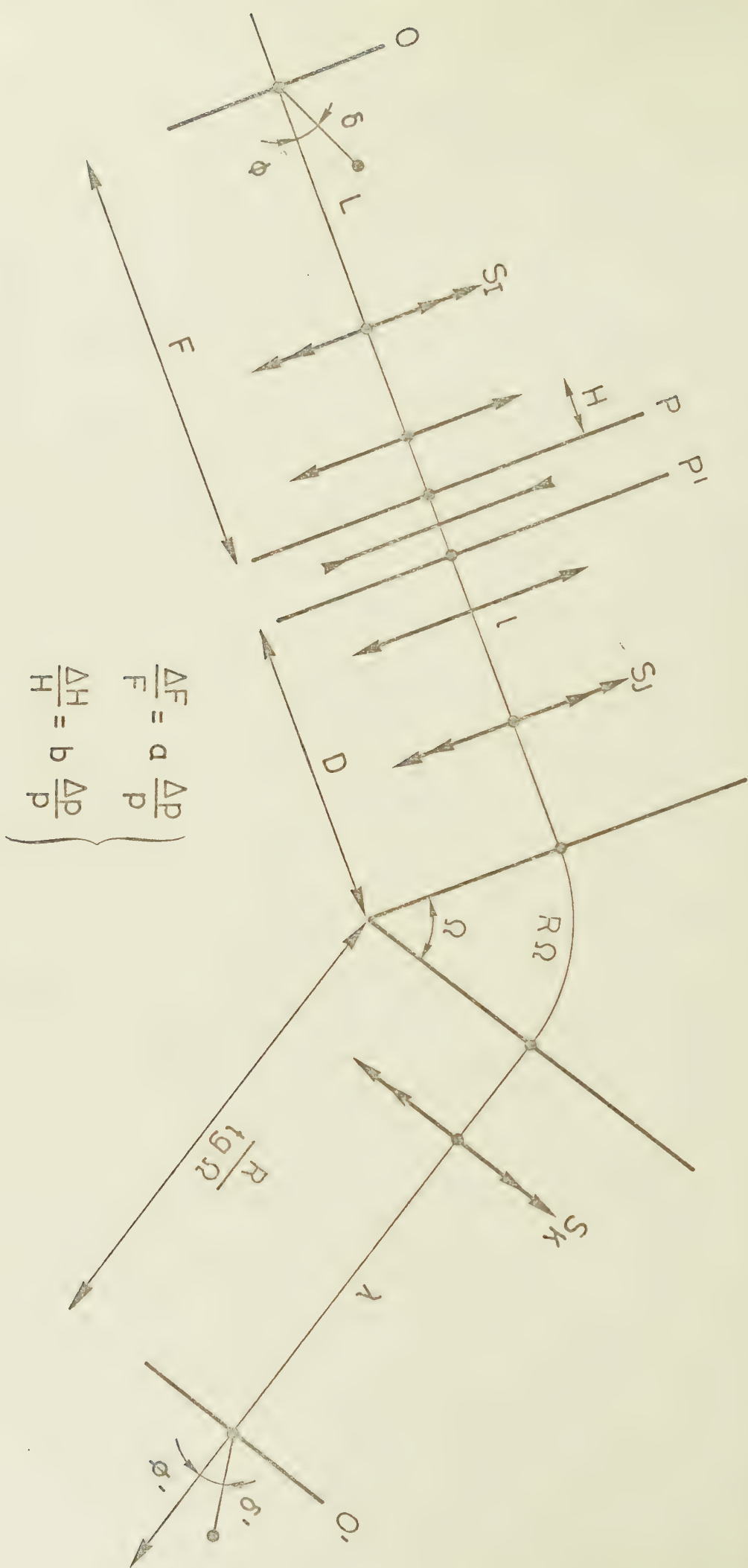


FIG. 13

Trois sextupôles de constantes I, J et K ont été introduits dans chacune des deux parties du spectromètre.

Les matrices de transfert sont données en appendice et le calcul ne comporte aucune difficulté de principe. Nous nous contenterons de donner le résultat final qui peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \delta' \sin \phi' = & R \frac{\Delta p}{p} - \delta \sin \phi \frac{R}{F \sin \Omega} \\ & + C_{\alpha\delta} \cdot \alpha \delta \sin \phi + C_{\alpha^2} \cdot \alpha^2 + C_{\delta^2} \cdot \delta^2 \sin^2 \phi \\ & + C_{\alpha\Delta p} \cdot \delta \frac{\Delta p}{p} + C_{\delta\Delta p} \cdot \delta \sin \phi \frac{\Delta p}{p} + C_{\Delta p^2} \cdot \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2, \end{aligned}$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} C_{\alpha\delta} = & + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \frac{R}{F \sin \Omega} - \sin \Omega \left[\cos \Omega + \frac{F-D}{R} \sin \Omega \right] \\ & + 2 IL^2 \frac{R}{F \sin \Omega} + 2 J \frac{R(F-1)}{\sin \Omega} \\ & - 2 K \lambda^2 \left[1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega \left(\frac{F-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega \right) \right], \end{aligned}$$

$$C_{\alpha^2} = - \frac{F^2}{2R} \sin^2 \Omega + IL^3 \frac{R}{F \sin \Omega} + JF^3 \frac{R}{F \sin \Omega} + K \lambda^3 \frac{F^2 \sin^2 \Omega}{R^2},$$

$$\begin{aligned} C_{\delta^2} = & + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} \frac{R}{F^2 \sin \Omega} \left[\frac{F-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega \right] - \frac{R}{2F^2} \left[\frac{F-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega \right]^2 \\ & + IL \frac{R}{F \sin \Omega} + \frac{JR}{\sin \Omega} \left(\frac{F-1}{F} \right)^2 + K \lambda \left[\frac{R}{F \sin \Omega} - \frac{\lambda}{F} \left(\frac{F-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega \right) \right]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\Delta p} = & - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} \frac{R}{F \sin \Omega} + F \left[\cos \Omega + \sin^2 \Omega + \frac{R}{F \sin \Omega} \left(a - b \frac{H}{F} \right) \right] \\ & + 2 K \lambda^2 F \sin \Omega \left(1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\delta\Delta p} = & - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} \frac{R}{F} \left[1 + \cos \Omega + \frac{F-D}{R} \sin \Omega \right] \\ & + \frac{R}{F \sin \Omega} (\sin^2 \Omega + \cos \Omega) \left[\cos \Omega + \frac{F-D}{R} \sin \Omega \right] \\ & + \frac{R}{F \sin \Omega} (a-1) + 2 K \lambda \left[- \frac{R^2}{F \sin \Omega} + \lambda \frac{R}{F} \left[1 + \cos \Omega + \frac{F-D}{R} \sin \Omega \right] \right. \\ & \left. - \frac{\lambda^2}{F} \sin \Omega \left[\cos \Omega + \frac{F-D}{R} \sin \Omega \right] \right], \end{aligned}$$

$$C_{\Delta p^2} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} R \sin \Omega - R \left[\cos \Omega + \frac{\sin^2 \Omega}{2} \right] + K \lambda (R - \lambda \sin \Omega)^2.$$

On trouve de même

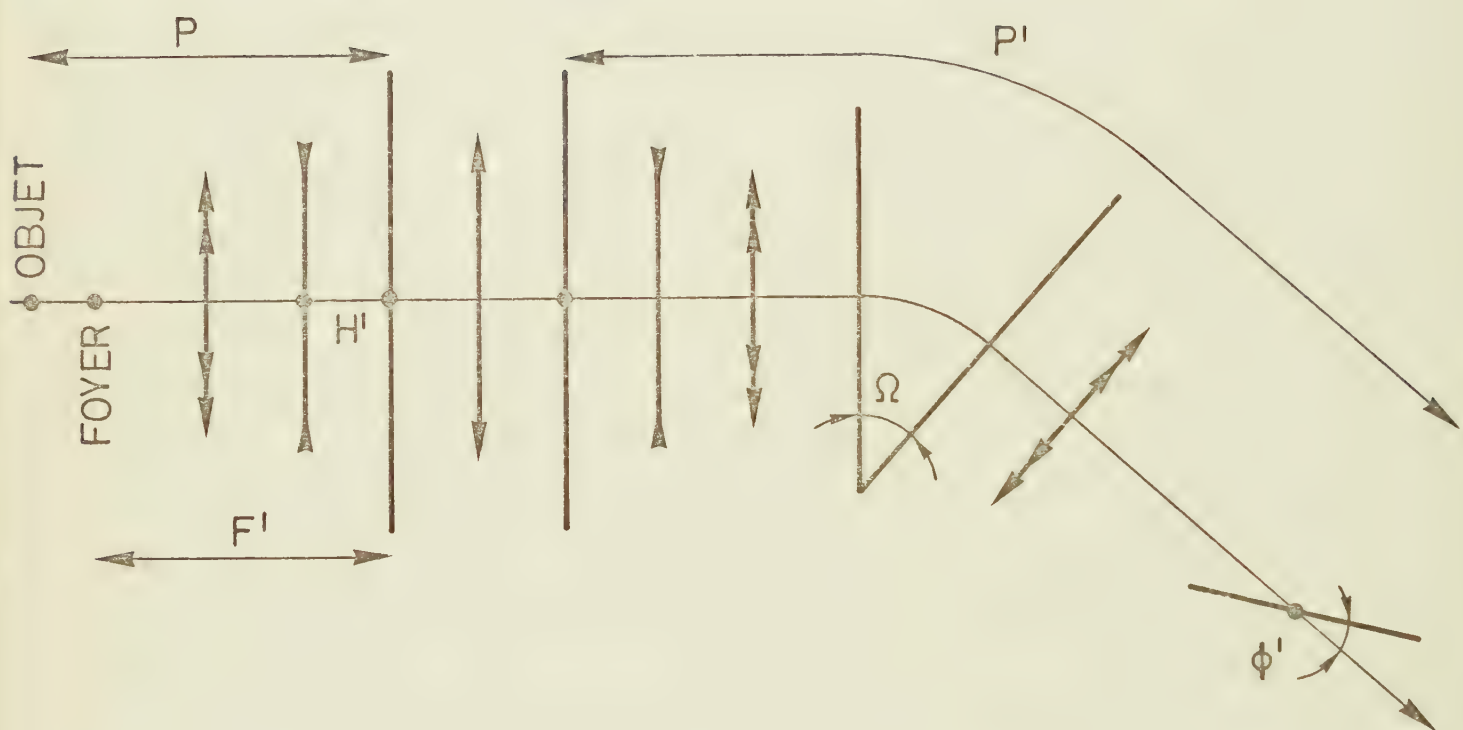


FIG.14

$$\begin{aligned}
\alpha' = & -\alpha \frac{F \sin \Omega}{R} + \frac{\Delta p}{p} \sin \Omega - \frac{\delta}{F} \sin \Phi \left[\frac{F-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega \right] \\
& + \Gamma_{\alpha\delta} \alpha \delta \sin \Phi + \Gamma_{\alpha^2} \alpha^2 + \Gamma_{\delta^2} \delta^2 \sin^2 \Phi \\
& + \Gamma_{\alpha\Delta p} \alpha \frac{\Delta p}{p} + \Gamma_{\delta\Delta p} \delta \sin \Phi \frac{\Delta p}{p} + F_{\Delta p^2} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2,
\end{aligned}$$

mais nous n'expliciterons pas les coefficients.

Remarques -

Les trois derniers coefficients ne font intervenir que le sextupôle K dont le rôle est fondamental. Les trois premiers coefficients font intervenir les sextupôles I, J et K. Cette remarque reste valable dans le développement de α' .

En principe on peut annuler deux des coefficients $C_{\alpha\Delta p}$, $C_{\delta\Delta p}$ et $C_{\Delta p^2}$ en choisissant convenablement K et $\tan \Phi'$. Ensuite on peut annuler deux des coefficients $C_{\alpha\delta}$, C_{α^2} et C_{δ^2} en choisissant I et J. Si on veut annuler $C_{\alpha\delta}$ il faudra faire varier I et J en même temps que l'angle de la cible Φ .

Différentes options sont possibles et nous reviendrons sur ce problème par la suite.

C. Focalisation verticale du spectromètre

Nous nous contenterons de suivre une trajectoire avec les conditions initiales

$$x_0 = 0, \alpha_0 = 0, y_0 = 0, \beta_0 = \beta.$$

Il faudra tenir compte des termes croisés qui interviennent lors du passage des sextupôles et sur les bords de l'aimant où on observe des déviations

$$\Delta\alpha = \pm \frac{\beta y}{R} \quad \text{et} \quad \Delta\beta = \mp \frac{\alpha y}{R}$$

Prenons les notations de la Figure 14.

On trouve en fin de calcul :

$$y_{\text{(hodoscope)}} = C_{\beta} \beta + C_{\beta\Delta p} \beta \frac{\Delta p}{p} + C_{\beta^2} \beta^2 + C_{\Delta p^2} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2,$$

avec les deux premiers coefficients :

$$C_{\beta} = P + P' - \frac{PP'}{F'} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
C_{\beta\Delta p} = & + \cos \Omega \left[P + P' - \frac{PP'}{F'} \right] + R \left[\Omega - \frac{1}{\sin \Omega} \right] \frac{F' - P}{F'} \\
& + a' \frac{PP'}{F'} + b'H' \left[2 - \frac{P + P'}{F'} \right] - 2K\lambda(R - \lambda \sin \Omega) \left[P + P' - \frac{PP'}{F'} \right] \\
& + 2 K\lambda^2(R - \lambda \sin \Omega) \frac{F' - P}{F'} + \frac{R}{\tan \Phi'} \frac{F' - P}{F'}.
\end{aligned}$$

Si on respecte la condition d'imagerie

$C_\beta = 0$, on peut écrire

$$C_{\beta\Delta p} = + \frac{PP'}{F'} \left[a' - b' \frac{H'}{F'} \right] + 2 b' H' + \frac{F' - P}{F'} \left[\frac{R}{\tan \phi'} + R \left(\Omega - \frac{1}{\sin \Omega} \right) + 2 K \lambda^2 (R - \lambda \sin \Omega) \right].$$

D. Angle de l'hodoscope

Si on veut réaliser une double focalisation correcte, il faut avoir simultanément :

$$C_{\alpha\Delta p} = 0 \quad \text{et} \quad C_{\beta\Delta p} = 0, \text{ soit}$$

$$- \frac{1}{\tan \phi'} + 2 K \lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega \right) + A_H = 0, \text{ et}$$

$$+ \frac{1}{\tan \phi'} + 2 K \lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega \right) + A_V = 0.$$

Les deux valeurs de ϕ' correspondant à $K = 0$ sont malheureusement assez différentes puisqu'on trouve

$$\phi'_{HO} = 12^\circ 6' \text{ par la première relation}$$

$$\text{et } \phi'_{VO} = 2^\circ 4' \text{ par la seconde.}$$

La double focalisation exigerait un angle

$$\phi'_{HV} = 4^\circ 0', \text{ et pour le sextupôle}$$

$$2 K \lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega \right) = 9,696$$

correspondant à une valeur minimale

$$K_m = 4,312 \text{ m}^{-2} \text{ (2,5 Ampères).}$$

En fait une inclinaison de 4° est une solution technique peu pratique et nous avons préféré utiliser un angle voisin de ϕ'_{HO} et un courant nul dans le dernier sextupôle, négligeant ainsi la focalisation dans le plan vertical qui est pratiquement sans effet, étant donnée la longueur des baguettes de l'hodoscope.

Remarque -

Pour le monochromateur, on trouve

$$\phi'_{HO} = 13^\circ 3', \quad \phi'_{VO} = 2^\circ 8' \quad \text{et} \quad \phi'_{HV} = 4^\circ 6'$$

mais le problème se pose différemment : d'une part, une bonne focalisation sur la cible n'est pas obligatoire, d'autre part, l'angle de la cible est imposé par la condition d'achromatisme du double spectromètre.

E. Effet de pupille. Modification des coefficients

On a déjà vu comment l'effet de pupille impose une direction moyenne des trajectoires acceptées par l'analyseur et provenant d'un certain point de la cible (il en va de même pour le monochromateur vis-à-vis de la fente du collimateur).

Une conséquence importante de cet effet est de modifier les coefficients du 2ème ordre que nous avons calculés. En effet il faut écrire :

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha^* = A \delta \sin \phi + \alpha^*, \text{ avec}$$

$A = -\frac{1}{F} \frac{F-H}{F}$ et remplacer α dans l'expression générale de $\delta' \sin \phi'$, de façon à faire apparaître le paramètre fluctuant α^* . On trouve alors

$$\begin{aligned} \delta' \sin \phi' &= R \frac{\Delta p}{p} - \delta \sin \phi \frac{R}{F \sin \Omega} \\ &+ C_{\alpha\delta}^* \cdot \alpha^* \delta \sin \phi + C_{\alpha^2}^* \cdot \alpha^{*2} + C_{\delta^2}^* \cdot \delta^2 \sin^2 \phi \\ &+ C_{\alpha\Delta p}^* \cdot \alpha^* \frac{\Delta p}{p} + C_{\delta\Delta p}^* \cdot \delta \sin \phi \frac{\Delta p}{p} + C_{\Delta p^2}^* \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2, \end{aligned}$$

avec les nouveaux coefficients

$$\begin{aligned} C_{\alpha\delta}^* &= C_{\alpha\delta} + 2 A C_{\alpha^2} & C_{\alpha^2}^* &\equiv C_{\alpha^2} \\ C_{\delta^2}^* &= C_{\delta^2} + A C_{\alpha\delta} + A^2 C_{\alpha^2} & C_{\alpha\Delta p}^* &\equiv C_{\alpha\Delta p} \\ C_{\delta\Delta p}^* &= C_{\delta\Delta p} + A C_{\alpha\Delta p} & C_{\Delta p^2}^* &\equiv C_{\Delta p^2} \end{aligned}$$

Procédons à une application numérique. On a dans le cas de l'analyseur (distances en cm) :

$$\begin{array}{lll} F = 275,5 & H = 103,9 & D = 205,6 \\ L = 128,1 & l = 147,4 & \lambda = 168,5 \\ a = + 1,100 & b = - 0,828 & \Omega = 35^\circ \end{array}$$

$$C_{\alpha\delta} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = 0,6154 + 32820 I + 70550 J - 19520 K$$

$$C_{\alpha\delta}^* = + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = 0,2581 + 23310 I - 23980 J - 41160 K$$

$$C_{\alpha^2} = - 79,00 + 2102000 I + 20900000 J + 4784000 K$$

$$C_{\delta^2} = + \frac{0,003895}{\operatorname{tg} \phi'} - 0,001198 + 128,10 I + 59,54 J + 19,90 K$$

$$C_{\delta^2}^* = + \frac{0,001633}{\operatorname{tg} \phi'} - \frac{0,002261}{\operatorname{tg} \phi} - 0,000211 + 64,63 I + 6,87 J + 88,51 K$$

$$C_{\alpha\Delta p} = - \frac{158,0}{\operatorname{tg} \phi'} + 705,3 + 3484000 K$$

$$C_{\delta\Delta p} = - \frac{1,189}{\text{tg } \Phi'} + 1,352 = 7106 \text{ K}$$

$$C_{\delta\Delta p}^* = - \frac{0,6317}{\text{tg } \Phi'} = 0,1331 = 14090 \text{ K}$$

$$C_{\Delta p^2} = + \frac{90,63}{\text{tg } \Phi'} = 155,4 + 634 \text{ 000 K.}$$

Adoptons maintenant les écarts standards

$$\alpha^* = \frac{1}{40} \text{ rad} \quad \delta = 1 \text{ cm} \quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{100},$$

et poursuivons le calcul dans le cas où

$$\Phi = \Phi' = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I = J = K = 0.$$

On trouve pour les différents termes d'aberration :

$$\frac{1}{40} C_{\alpha\delta}^* = - \frac{0,2531}{40} = - 0,0063$$

$$\frac{1}{1600} C_{\alpha^2} = - \frac{70,00}{1600} = - 0,0437$$

$$1 \cdot C_{\delta^2}^* = - 0,0002$$

$$\frac{1}{4000} C_{\alpha\Delta p} = + \frac{705,3}{4000} = + 0,1763$$

$$\frac{1}{100} C_{\delta\Delta p}^* = - \frac{0,2531}{100} = - 0,0025$$

$$\frac{1}{10000} C_{\Delta p^2} = \frac{155,4}{10000} = + 0,0155$$

Si on veut jouer sur les valeurs I J K, on voit que les trois derniers termes dépendent seulement du dernier sextupôle dont le courant est pratiquement imposé par la condition

$$C_{\alpha\Delta p} = 0 \quad \text{qui donne}$$

$$K = - \frac{705,3}{3 \cdot 484 \text{ 000}} = - 2,0244 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-2}.$$

Ensuite on est libre de choisir I et J de sorte que

$$C_{\alpha^2} = - 1047,5 + 2 \cdot 102 \text{ 000 } I + 20 \text{ 900 000 } J = 0 \quad \text{et}$$

$$C_{\alpha\delta}^* = + 8,0743 + 23 \text{ 310 } I - 23 \text{ 980 } J = 0, \quad \text{soit}$$

$$I = - 2,672 \cdot 10^{-4},$$

$$J = + 0,7639 \cdot 10^{-4}.$$

Si on procède de même avec $\Phi = \pm \frac{\pi}{4}$ on trouve

$$\Delta I = \pm 0,389 \cdot 10^{-4}, \text{ et}$$

$$\Delta J = \pm 0,0391 \cdot 10^{-4} \quad \text{par rapport aux valeurs précédentes.}$$

La variation sur J étant extrêmement faible, il peut être souhaitable pratiquement de laisser J fixe et de faire varier I empiriquement.

F. Calibration de l'analyseur avec les α du ThC'

Il était essentiel de calibrer précisément l'analyseur avec des particules de quantité de mouvement connue. Nous avons pris les α du ThC' pour lesquels :

$$T = 8,78540 \text{ MeV}$$

$$M = 931,478 \times 4,002\,603 \text{ MeV}, \text{ d'où}$$

$$p = 128,0498 \neq 128,05 \text{ MeV/c} \quad \text{et}$$

$$B\rho = \frac{1}{2 \text{ eC}} \sqrt{T(T+2m)}$$

$$= 4271,28 \text{ Gauss. m.}$$

La manipulation consistait à disposer la source à la place de la cible et à régler les différents courants de façon à obtenir la meilleure image possible dans le plan de l'hodoscope. La source pouvait être déplacée latéralement et les variations de quantité de mouvement étaient simulées par des variations proportionnelles des champs magnétiques (voir en appendice).

Le comportement du système dans ces conditions constitue un excellent test de la théorie. L'ensemble des résultats confirme quantitativement les prévisions et en particulier les courants de réglage trouvés expérimentalement pour les sextupôles sont proches des valeurs calculées.

Toutefois, le résultat le plus important de cette étude concerne la calibration proprement dite. Si l'aimant fonctionne comme il est prévu (hypothèse du secteur magnétique) avec un rayon de courbure

$$R = 1,58 \text{ m, on doit avoir au réglage}$$

$$B = \frac{4271,3}{1,58} = 2703,3 \text{ Gauss.}$$

Or les mesures faites par résonance magnétique nucléaire ont donné pour résultat la fréquence

$$F_{\text{proton}} = 11,4966 \text{ MHz qui correspond à}$$

$$B = \frac{11,4966}{0,00425784} = 2700,1 \text{ Gauss.}$$

La calibration donne la valeur prévue à 1/1000 près et on peut écrire pour les mesures avec des pions :

$$p_{\text{MeV/c}} = \frac{128,05}{2700,1} B_{\text{Gauss}}, \text{ ou encore}$$

$$F_{\text{proton MHz}} = 0,0898 p_{\text{MeV/c.}}$$

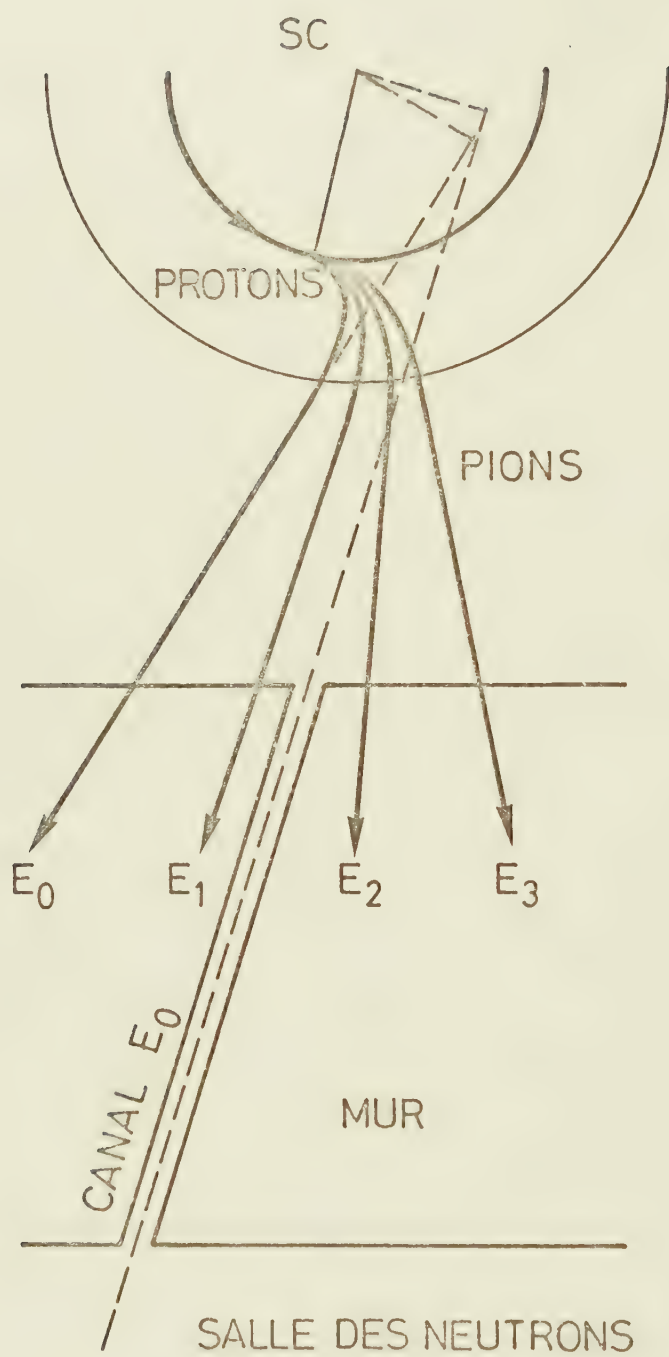
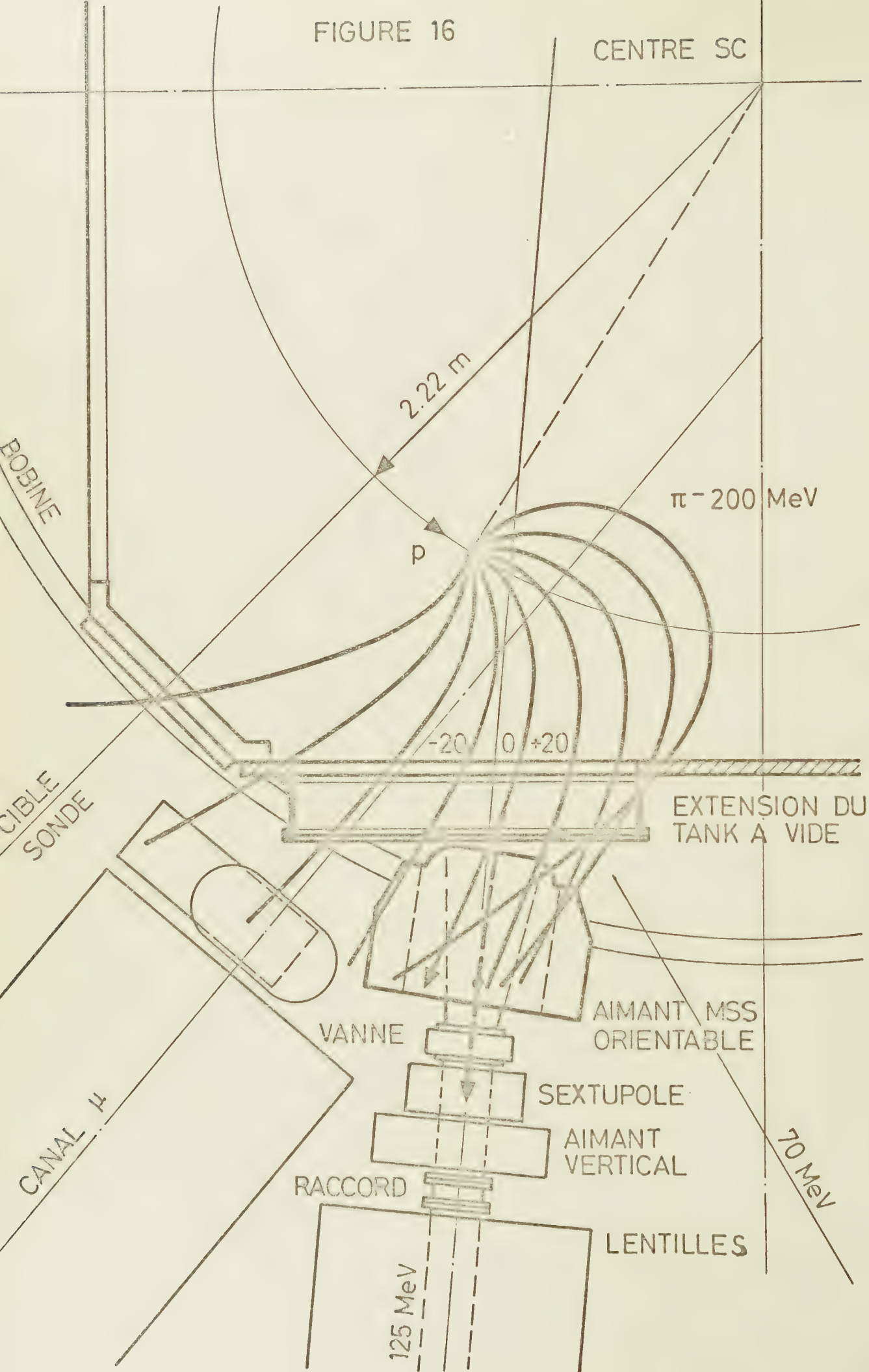


FIG. 15

FIGURE 16



C H A P I T R E I I I

LES PROBLEMES D'ADAPTATION

A. Le faisceau de pions en sortie de machine

Les pions sont produits en bombardant une cible de Beryllium avec le faisceau de protons du synchrocyclotron. La position radiale de la cible est pratiquement imposée à 2,20 m environ du centre car les pertes en protons deviennent rapidement importantes au-delà.

Avant l'installation de notre faisceau à énergie variable la position angulaire de la cible était également imposée par le choix de l'énergie des pions. En effet, un certain nombre de canaux sont ouverts à travers le mur de protection qui sépare la machine de la salle d'expérience (Figure 15), ce qui définit des directions de faisceau fixes, et, pour une quantité de mouvement donnée, impose à la fois la position angulaire de la cible et le canal à utiliser.

Pour des raisons d'intensité évidentes il faut raisonner sur les pions émis vers l'avant.

Le principe de notre faisceau consiste à introduire un aimant de déflexion le plus près possible de la cible, pratiquement entre les bobines de la machine. On peut ainsi modifier les trajectoires des particules émises, et, en jouant sur la position de la cible, obtenir toute une gamme d'énergie sur un canal unique. L'aimant utilisé MSS (10000 G) est orientable pour permettre une optimisation géométrique.

Le canal 200 MeV et le canal 150 MeV étant inutilisables à cause de l'encombrement du canal μ , c'est le canal 125 MeV qui a été choisi car une étude permet de voir que c'est le seul canal restant qu'on puisse alimenter avec des pions d'énergie comprise en 100 et 300 MeV, quel que soit le sens de rotation des protons dans le SC. Par ailleurs, notre disposition, le plus près possible du canal μ , laisse le canal 70 MeV à la disposition des expérimentateurs (Figure 16).

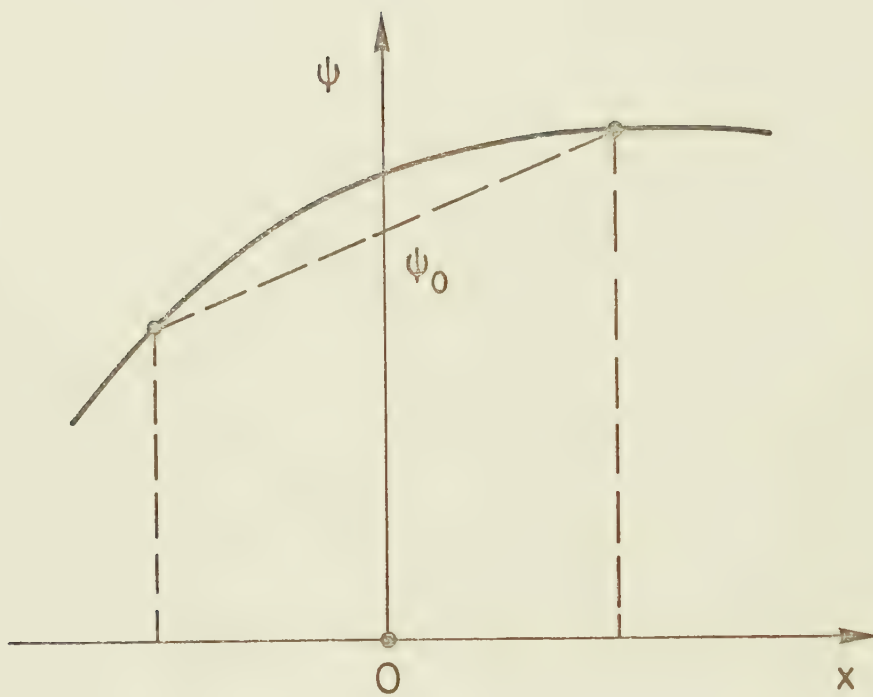


FIG. 17

Le faisceau de pions émis est déjà analysé en impulsion par le champ magnétique du SC mais les aberrations sont importantes car les trajets des particules ne sont pas égaux et l'intégrale $\int B dS$ dépend essentiellement de l'angle d'émission au départ.

L'étude des trajectoires à la sortie des bobines montre que leur inclinaison par rapport à une direction fixe n'est pas une fonction linéaire de la position. Si on fait une exploration transversale du faisceau, la courbe donnant l'angle par rapport à la direction de notre canal en fonction du déplacement possède une forte convexité comme indiqué sur la Figure 17.

La droite joignant les points extrêmes correspondant à l'acceptance géométrique du transport de faisceau représente la déviation que doivent produire les quadrupôles. La valeur médiane ψ_0 représente la déflection moyenne que doit réaliser l'aimant. L'aberration résiduelle est de la forme

$$\Delta\psi = ax^2 + b$$

et doit être corrigée par un champ sextupolaire.

Immédiatement après l'aimant se trouve donc un sextupôle pour lequel on a :

$$\int B dS = 31 (x^2 + 59)I .$$

$$\text{Gauss.cm} \quad \text{cm} \quad \text{Amp}$$

C'est ensuite un faisceau sensiblement conique qui traverse un doublet de lentilles et se trouve focalisé sur la fente d'un collimateur placé au milieu du mur de protection et qui joue le rôle de source pour notre double spectromètre.

L'optique comporte encore un aimant de correction vertical qui permet de compenser la différence de hauteur entre le point d'impact moyen des protons sur la cible et le plan défini mécaniquement par l'axe du canal. En effet, ce point d'impact peut varier suivant la position de la source d'ions et suivant le plan de symétrie magnétique de la machine qui est réglable à l'aide des bobines correctrices du "diverter".

Tout le transport de faisceau est effectué sous vide.

La focalisation due au champ de la machine est équivalente à celle d'une loupe de 3 m de focale située au bord des bobines et le faisceau de pions semble provenir d'un point en arrière de la cible vers le centre de la machine. Dans ces conditions l'acceptance angulaire à partir de la cible est excellente ($\pm 10^\circ$ à 200 MeV).

Avec une source de 1 mm de largeur et une fente de 5 mm, l'incertitude sur l'énergie est de l'ordre de 1 MeV, alors qu'elle serait 4 fois

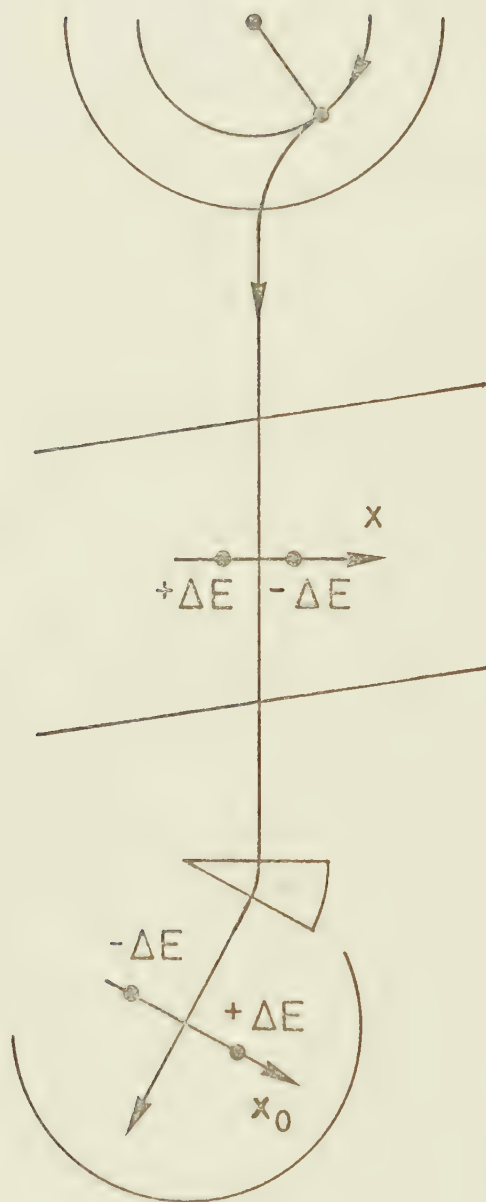


FIG. 18

plus grande sans correction des aberrations quadratiques. La luminosité a été portée à quelques $10^4 \pi^-$ par seconde et par bande de 1 MeV. La dispersion du système se traduit par une relation entre l'écart moyen en quantité de mouvement et la distance au centre de la fente :

$$\frac{\overline{\Delta p}}{p} \% = + 1,85 \times \text{cm}.$$

B. Adaptation entre le faisceau de sortie et le spectromètre

En examinant la forme des trajectoires, on peut se demander s'il ne serait pas plus rationnel d'inverser le sens du champ de la machine et par conséquent le sens de parcours des protons (Figure 18).

Comme il est facile de s'en rendre compte, ceci conduit à écrire pour la dispersion sur la fente du collimateur :

$$\frac{\overline{\Delta p}}{p} = - 1,85 \times .$$

Etant donnée la disposition du spectromètre dans la salle, on obtient alors au centre de la plateforme

$$x_0 = - 0,873 \times + 1,58 \frac{\overline{\Delta p}}{p} = - 3,796 \times .$$

Un tel étalement sur la cible du spectromètre conduirait à des aberrations intolérables. Comme il ne saurait être question de retourner le spectromètre pour des raisons d'encombrement dans la salle d'expérience, force nous est d'opérer comme indiqué plus haut, avec

$$\frac{\overline{\Delta p}}{p} = + 1,85 \times$$

et par conséquent

$$x_0 = - 0,873 \times + 1,58 \frac{\overline{\Delta p}}{p} = + 2,050 \times .$$

Ce n'est que dans le cas où nous voulons obtenir des π^+ que le champ de la machine doit être inversé. En effet on est alors obligé de prendre les particules émises vers l'arrière (les particules émises vers l'avant ne pouvant pas sortir de la machine). Dans ces conditions la figure représentant les trajectoires reste inchangée ainsi que la formule de dispersion sur la fente du collimateur. Dans le cas des π^+ le fait de prendre les particules vers l'arrière diminue l'intensité d'un ordre de grandeur et ne permet guère de travailler au-delà de 120 MeV.

Revenons aux π^- en admettant que les protons tournent dans le sens normal (champ $\downarrow$). Admettons pour simplifier que l'analyseur et le monochromateur soient en ligne. On peut maintenant se demander s'il ne

serait pas possible de réaliser une triple adaptation achromatique en jouant sur le grandissement γ de l'analyseur, de telle sorte que

$$x' = -\gamma x_0 + 1,58 \frac{\Delta p}{p} = -2,050 x + 2,923 x = 0 ,$$

soit $\gamma = 1,425$,

Ce serait méconnaître la vraie nature du problème. En fait il faut écrire la relation

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{Fente}} = + 1,85 x + \frac{\Delta p}{p} , \text{ d'où}$$

$$x_0 = + 2,050 x + 1,58 \frac{\Delta p}{p} ,$$

$\frac{\Delta p}{p}$ étant la variable aléatoire qu'il convient d'éliminer. Ceci ne peut être réalisé, comme on l'a vu dans le chapitre I, qu'en prenant le grandissement $\gamma = 1$.

La seule solution praticable est d'utiliser une fente fine pour laquelle on puisse écrire $x \neq 0$.

On a alors à la sortie de la cible :

$$\frac{\Delta p}{p} = + \frac{x_0}{1,58} + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_0 , \text{ d'où}$$

$$x' = -x_0 + 1,58 \frac{\Delta p}{p} = + 1,58 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_0 .$$

Pour résumer la situation, on est amené en quelque sorte à isoler le double spectromètre, système classique dont on connaît bien le fonctionnement et que l'on peut contrôler facilement quel que soit l'état de réglage du faisceau de sortie et de la machine elle-même.

Remarque - Une valeur de x quelconque mais bien définie conviendrait également puisque le déplacement de la fente fine se traduirait simplement par un déplacement du zéro de l'hodoscope.

La solution idéale consiste à utiliser plusieurs fentes fines côte à côte, en fait un hodoscope à scintillateurs définissant plusieurs voies à travers le double spectromètre. On peut ainsi améliorer la résolution tout en augmentant le taux de comptage. C'est ce que nous comptons faire dans une prochaine expérience.

C. Calcul des aberrations du monochromateur

En dehors du fait que le monochromateur doit accepter géométriquement les particules issues du collimateur, l'analyse magnétique effectuée par le système de transport amont produit une modification des coefficients d'aberration du 2ème ordre.

En effet, de même que nous avons posé

$$\alpha = \overline{\alpha} + \alpha^* = A x + \alpha^*,$$

pour tenir compte de l'effet de pupille, nous devons écrire

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\overline{\Delta p}}{p} + \frac{\Delta p^*}{p} = B x + \frac{\Delta p^*}{p},$$

pour tenir compte de l'éclairement chromatique de la fente.

En remplaçant α et $\frac{\Delta p}{p}$ dans l'expression de $\delta' \sin \phi'$ on trouve alors :

$$\begin{aligned} \delta' \sin \phi' = & \left[-x \frac{R}{F \sin \Omega} + R \frac{\overline{\Delta p}}{p} \right] + R \frac{\Delta p^*}{p} \\ & + C_{\alpha\delta}^{**} \cdot \alpha^* x + C_{\alpha^2}^{**} \cdot \alpha^{*2} + C_{\delta^2}^{**} \cdot x^2 \\ & + C_{\alpha\Delta p}^{**} \cdot \alpha^* \frac{\Delta p^*}{p} + C_{\delta\Delta p}^{**} \cdot x \frac{\Delta p^*}{p} + C_{\Delta p^2}^{**} \cdot \left(\frac{\Delta p^*}{p} \right)^2, \end{aligned}$$

avec les coefficients

$$C_{\alpha^2}^{**} \equiv C_{\alpha^2} \quad C_{\alpha\Delta p}^{**} \equiv C_{\alpha\Delta p} \quad C_{\Delta p^2}^{**} \equiv C_{\Delta p^2}$$

$$C_{\alpha\delta}^{**} = C_{\alpha\delta} + 2 A C_{\alpha^2} + B C_{\alpha\Delta p}$$

$$C_{\delta^2}^{**} = C_{\delta^2} + A C_{\alpha\delta} + A^2 C_{\alpha^2} + A B C_{\alpha\Delta p} + B C_{\delta\Delta p} + B^2 C_{\Delta p^2}$$

$$C_{\delta\Delta p}^{**} = C_{\delta\Delta p} + A C_{\alpha\Delta p} + 2 B C_{\Delta p^2}.$$

Dans le cas du monochromateur (distances en cm) :

$F = 315,6$	$r = 96,9$	$D = 198,6$
$L = 175,2$	$l = 140,4$	$\lambda = 168,5$
$a = + 1,248$	$b = - 0,712$	$\Omega = 35^\circ$
$\phi = \frac{\pi}{2}$	$B = + 0,0185$	

et on trouve :

$$C_{\alpha^2} = -103,7 + 4\,694\,000 I + 27\,440\,000 J + 6\,280\,000 K$$

$$C_{\alpha\Delta p} = - \frac{181,0}{\operatorname{tg} \phi'} + 766,4 + 3\,991\,000 K$$

$$C_{\Delta p^2} = + \frac{90,63}{\operatorname{tg} \phi'} - 155,4 + 634\,300 K$$

$$C_{\alpha\delta}^{**} = - \frac{2,349}{\operatorname{tg} \phi'} + 13,92 + 32\,970 I - 23\,970 J + 32\,670 K$$

$$C_{\delta^2}^{**} = + \frac{0,01884}{\operatorname{tg} \phi'} - 0,05741 + 57,89 I + 5,249 J + 42,54 K$$

$$C_{\delta\Delta p}^{**} = + \frac{2,626}{\operatorname{tg} \phi'} - 5,970 + 10390 K.$$

Adoptons maintenant les écarts standards

$$\alpha^* = \frac{1}{50} \text{ rad} \quad x = \frac{1}{4} \text{ cm} \quad \frac{\Delta p^*}{p} = \frac{1}{200} ,$$

et poursuivons le calcul avec

$I = J = K = 0$, pour plusieurs valeurs de $\text{tg } \Phi'$.

On trouve :

(en cm)	$\text{tg } \Phi' = \infty$	$\text{tg } \Phi' = -1$	$\text{tg } \Phi' = -\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2500} C_{\alpha^2}$	- 0,04148	- 0,04148	- 0,04148
$\frac{1}{10000} C_{\alpha \Delta p}$	+ 0,07664	+ 0,09474	+ 0,13094
$\frac{1}{40000} C_{\Delta p^2}$	- 0,00389	- 0,00615	- 0,01068
$\frac{1}{200} C_{\alpha \delta}^{**}$	+ 0,06960	+ 0,08135	+ 0,10484
$\frac{1}{16} C_{\delta^2}^{**}$	- 0,00359	- 0,00477	- 0,00712
$\frac{1}{800} C_{\delta \Delta p}^{**}$	- 0,00746	- 0,01075	- 0,01732

Si on désire réduire à $\frac{1}{1000}$ (0,158 cm) l'ensemble de ces aberrations, on peut régler les trois sextupôles de façon à annuler les trois termes principaux en α ,

$$C_{\alpha^2} \quad C_{\alpha \Delta p} \quad \text{et} \quad C_{\alpha \delta}^{**} .$$

Un raisonnement plus sûr consiste à chercher le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^2 \rangle = & \left[\frac{1}{2500} C_{\alpha^2} \right]^2 + \left[\frac{1}{10000} C_{\alpha \Delta p} \right]^2 + \left[\frac{1}{40000} C_{\Delta p^2} \right]^2 \\ & + \left[\frac{1}{200} C_{\alpha \delta}^{**} \right]^2 + \left[\frac{1}{16} C_{\delta^2}^{**} \right]^2 + \left[\frac{1}{800} C_{\delta \Delta p}^{**} \right]^2 . \end{aligned}$$

On trouve ainsi trois relations linéaires d'où on tire :

$$10^4 I = + \frac{0,1717}{\text{tg } \Phi'} - 1,764 ,$$

$$10^4 J = - \frac{0,1318}{\text{tg } \Phi'} + 0,7757 ,$$

$$10^4 K = + \frac{0,4475}{\text{tg } \Phi'} - 1,906 .$$

En adoptant ces valeurs (qui correspondent à 1 % près aux valeurs qu'on obtient par la première méthode) on obtient une erreur résiduelle de l'ordre de $1/10000$ en $\frac{\Delta p}{p}$.

Comme on n'a pas besoin de faire aussi bien, on peut se demander s'il ne serait pas possible d'éliminer un des sextupôles. Effectivement on trouve qu'on peut supprimer I et garder J et K, mais c'est la seule solution qui donne de bons résultats. Le calcul de minimisation conduit aux valeurs :

$$10^4 J = - \frac{0,1095}{\operatorname{tg} \phi'} + 0,5470, \text{ et}$$

$$10^4 K = + \frac{0,4785}{\operatorname{tg} \phi'} - 2,224$$

qui laissent subsister des erreurs résiduelles de 2 à 3/10000 en $\frac{\Delta p}{p}$, ce qui est tout à fait convenable.

Aucune solution n'est acceptable si on se limite à un seul sextupôle car on obtient des résultats qui sont à peine meilleurs qu'en les supprimant tous.

La solution $I = J = K = 0$ est évidemment intéressante du point de vue de la simplicité expérimentale et donne des erreurs résiduelles de 1/1000 en $\frac{\Delta p}{p}$, ce qui est déjà tout à fait remarquable.

C'est cette solution qu'il faut adopter si on travaille avec des résolutions de l'ordre de 0,5 % par exemple.

D. Calcul des aberrations de l'analyseur

Le même problème se pose pour l'analyseur car le monochromateur produit un éclaircissement chromatique de la cible, avec le coefficient

$$B = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{F_2 \sin \Omega_2} \quad (\text{condition d'achromatisme}).$$

Il se produit des transformations importantes dans les coefficients en δ qui deviennent :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\delta}^{**} &= + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \frac{R}{F \sin \Omega} + \frac{1}{\operatorname{tg} \Omega} \\ &\quad - \sin \Omega \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right] + \frac{R}{F \sin^2 \Omega} \left(a - b \frac{H}{F} \right) \\ &\quad + 2 IL^2 \frac{R}{F \sin \Omega} \left[1 - \frac{L}{F} \frac{F-H}{F} \right] + 2 J \frac{R(H-1)}{\sin \Omega} \\ &\quad + 2 K \lambda^3 \frac{\sin \Omega}{R} \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right], \\ C_{\delta^2}^{**} &= - \frac{1}{F \operatorname{tg} \phi} \frac{R}{F \sin \Omega} \frac{F-H}{F} + \frac{1}{F \operatorname{tg} \Omega} \frac{R}{F \sin \Omega} \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right] \\ &\quad - \frac{R}{2 F^2} \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right]^2 - \frac{R}{F^2 \sin^2 \Omega} \left[\frac{F-H}{F} \left(a - b \frac{H}{F} \right) - a + 1 \right] \\ &\quad + IL \frac{R}{F \sin \Omega} \left[1 - \frac{L}{F} \frac{F-H}{F} \right]^2 + J \frac{R}{\sin \Omega} \left(\frac{H-1}{F} \right)^2 \\ &\quad + K \frac{\lambda^3}{F^2} \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\delta\Delta p}^{**} = & - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} \frac{R}{F} \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right] \\
 & + \frac{R}{F \sin \Omega} (\sin^2 \Omega + \cos \Omega) \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right] \\
 & - \frac{R}{F \sin \Omega} \left[\frac{F-H}{F} \left(a - b \frac{H}{F} \right) - a + 1 + \cos \Omega \right] \\
 & + 2 K \lambda^2 \frac{R}{F} \left[\frac{H-D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega - 1 \right] \left[1 - \frac{\lambda}{R} \sin \Omega \right].
 \end{aligned}$$

On constate que les coefficients $C_{\alpha\delta}^{**}$ et $C_{\delta^2}^{**}$ sont fonction de ϕ mais indépendants de ϕ' , ce qui n'était pas le cas des coefficients $C_{\alpha\delta}$ et C_{δ^2} .

On a déjà calculé dans le chapitre II :

$$C_{\alpha^2} = - 79,00 + 2 \ 102 \ 000 \ I + 20 \ 900 \ 000 \ J + 4 \ 784 \ 000 \ K$$

$$C_{\alpha\Delta p} = - \frac{158,0}{\operatorname{tg} \phi'} + 705,3 + 3 \ 484 \ 000 \ K$$

$$C_{\Delta p^2} = + \frac{90,63}{\operatorname{tg} \phi'} - 155,4 + 634 \ 300 \ K.$$

On obtient de même les nouveaux coefficients :

$$C_{\alpha\delta}^{**} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} + 4,206 + 23310 \ I - 23970 \ J - 19110 \ K$$

$$C_{\delta^2}^{**} = - \frac{0,002261}{\operatorname{tg} \phi} - 0,008101 + 64,63 \ I + 6,869 \ J + 19,07 \ K$$

$$C_{\delta\Delta p}^{**} = + \frac{0,3155}{\operatorname{tg} \phi'} - 2,230 - 6957 \ K.$$

Si on prend comme écarts types:

$$\alpha^* = \frac{1}{40} \text{ rad} \qquad \delta = 1 \text{ cm} \qquad \frac{\Delta p^*}{p} = \frac{1}{100},$$

il est facile de voir que le terme prépondérant correspond au coefficient $C_{\alpha\Delta p}$ dont la réduction impose le courant du sextupôle K. Une solution élégante peut être trouvée dans le cas de l'analyseur : en prenant un angle de l'hodoscope fixe tel que

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{158,0}{705,3}, \text{ soit}$$

$$\phi' = 12^\circ 6', \text{ ; on obtient la solution } K = 0.$$

Il ne reste plus que deux sextupôles qui permettent d'annuler les deux coefficients encore importants

$$C_{\alpha^2} = - 79,00 + 2 \ 102 \ 000 \ I + 20 \ 900 \ 000 \ J, \text{ et}$$

$$C_{\alpha\delta}^{**} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} + 4,206 + 23 \ 310 \ I - 23 \ 970 \ J.$$

Adoptons maintenant la méthode qui consiste à chercher le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^2 \rangle &= \left[\frac{1}{1600} C_{\alpha 2} \right]^2 + \left[\frac{1}{4000} C_{\alpha \Delta p} \right]^2 + \left[\frac{1}{10000} C_{\Delta p^2} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{1}{40} C_{\alpha \delta}^{**} \right]^2 + \left[\frac{1}{1} C_{\delta^2}^{**} \right]^2 + \left[\frac{1}{100} C_{\delta \Delta p}^{**} \right]^2 . \end{aligned}$$

On peut d'abord optimiser par rapport à toutes les variables disponibles. On trouve alors :

$$10^4 I = - \frac{0,3631}{\operatorname{tg} \phi} - 1,979 ,$$

$$10^4 J = + \frac{0,02847}{\operatorname{tg} \phi} + 0,4154 ,$$

$$10^4 K = + \frac{0,03526}{\operatorname{tg} \phi} - 0,7798 ,$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \phi'} = + 2,061 \cdot 10^4 K + 4,343$$

$$= + \frac{0,07265}{\operatorname{tg} \phi} + 2,736 .$$

Il faut remarquer que les termes de $\langle \epsilon^2 \rangle$ qui contiennent $\frac{1}{\operatorname{tg} \phi'}$ contiennent seulement le coefficient K. Il en résulte que l'angle de l'hodoscope n'est fonction de l'angle de la cible que par l'intermédiaire de K. Dans ces conditions l'erreur résiduelle correspond à une résolution $\sim \frac{2}{10\,000}$ mais la nécessité pratique de fixer l'hodoscope sur une position moyenne (70°) peut affecter cette valeur.

On peut ensuite chercher à utiliser seulement deux sextupôles. On trouve que la meilleure solution du point de vue de la résolution consiste à utiliser I et J, indépendamment du fait que K = 0 implique une valeur fixe pour

$$\phi' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,230 = 13^\circ 0 .$$

On trouve pour les sextupôles :

$$10^4 I = - \frac{0,3815}{\operatorname{tg} \phi} - 1,572 , \text{ et}$$

$$10^4 J = + \frac{0,03839}{\operatorname{tg} \phi} + 0,1960 ,$$

valeurs qui correspondent à celles de la méthode élémentaire avec des écarts inférieurs à 2%. On calcule les mêmes résolutions qui restent inférieures à $3/10\,000$ pour $\frac{1}{3} < \operatorname{tg} \phi < \infty$, c'est-à-dire de l'ordre des résolutions ultimes réalisables en faisant varier tous les paramètres. C'est cette solution qu'il faut adopter lorsqu'on désire opérer dans les conditions les plus fines.

Enfin, la recherche d'un réglage avec un seul sextupôle ne conduit à aucune solution valable : il vaut autant supprimer tous les sextupôles. On obtient alors une résolution $\sim 1/1000$, avec la valeur de ϕ' déjà

calculée (ce qui peut permettre éventuellement le passage commode entre les deux états de fonctionnement proposés).

Remarque - On ne trouve pas tout à fait la même valeur de ϕ' en faisant $C_{\alpha\Delta p} = 0$, mais cet écart est pratiquement insensible dans les applications numériques.

E. Chromatisme angulaire sur la cible du spectromètre

Si on veut faire des mesures à faible angle de diffusion, il est important que la direction des trajectoires incidentes soit sensiblement constante en différents points de la cible (condition de télécentrisme). Il faut donc que l'angle moyen

$\overline{\alpha'}$ soit indépendant de

$\frac{\Delta p}{p}$ ou, ce qui revient au même, indépendant du point origine sur la fente du collimateur.

On peut écrire :

$$\overline{\alpha'} = -\overline{\alpha} \frac{F \sin \Omega}{R} + \frac{\overline{\Delta p}}{p} \sin \Omega - \frac{x}{F} \left[\frac{F - D}{R} \sin \Omega + \cos \Omega \right],$$

avec les relations

$$\overline{\alpha} = -\frac{1}{F} \frac{F - H}{F} x \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\Delta p}}{p} = Bx.$$

La condition pour que $\overline{\alpha'}$ soit indépendant de x (et nul) devient alors :

$$B = \frac{1}{F} \left[\frac{1}{\tan \Omega} - \frac{D - H}{R} \right] = \frac{1}{F} \left[\frac{1}{\tan \Omega} - \frac{\Delta}{R} \right],$$

Δ étant la distance physique entre la dernière lentille du triplet et l'aimant. On trouve ainsi

$$B = 0,0025 \text{ au lieu de } 0,0185.$$

La condition de télécentrisme n'est pas réalisée mais nos paramètres sont tels qu'il n'en résulte pas d'erreur angulaire importante.

Faisons une application numérique. On a

$$\overline{\alpha'} = \left[B - \frac{1}{F} \left(\frac{1}{\tan \Omega} - \frac{\Delta}{R} \right) \right] x \sin \Omega.$$

Pour $x = 1 \text{ cm}$, il vient

$$\overline{\alpha'} = [0,0185 - 0,0025] \sin \Omega, \text{ soit}$$

$$\overline{\alpha'} = 0,0092 \approx 0,53^\circ.$$

Cette valeur est largement comprise dans l'angle solide d'émission du monochromateur (demi-angle 3 fois plus grand) et nous n'avons pas besoin de nous soucier d'une lentille de champ.

F. Etude géométrique des cibles

1. Enoncé du problème

Avec une fente fine, le monochromateur donne sur la cible du spectromètre une valeur de δ telle que

$$\delta \sin (\theta + \phi) = R_1 \frac{\Delta p}{p} .$$

Le passage des particules à travers la cible se traduit par une perte d'énergie décomposable en plusieurs termes :

- une perte cinématique, fonction de θ ,
- une perte par excitation du noyau diffuseur,
- une perte par ralentissement, fluctuant autour d'une certaine valeur moyenne, suivant le point où a lieu la diffusion dans la cible.

La perte totale, pour un angle donné, est donc de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{p} + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0 + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0^* \\ \text{constante} + \text{excitation} + \text{variable} \end{array} \right.$$

A un déplacement près de l'origine (en fait l'analyseur est réglé sur l'impulsion $p = P$ on obtient sur l'hodoscope :

$$\begin{aligned} \delta' \sin \phi' &= R_2 \left[\frac{\Delta p}{p} + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0 + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0^* \right] - \delta \sin \phi \frac{R_2}{F_2 \sin \Omega_2} \\ &= R_2 \frac{\Delta p}{p} \left[1 - \frac{\sin \phi}{\sin (\theta + \phi)} \frac{R_1}{F_2 \sin \Omega_2} \right] \\ &\quad + R_2 \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0 + R_2 \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0^* . \end{aligned}$$

On a déjà vu comment la variable aléatoire $\frac{\Delta p}{p}$ introduite à la fente objet du spectromètre, peut être éliminée en orientant convenablement la cible. Par contre on ne dispose plus d'aucun paramètre pour éviter les variations $\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0^*$ dans le cas où la cible est limitée géométriquement par deux plans parallèles.

Il faut créer ce paramètre supplémentaire en fabriquant une cible en forme de coin, ou bien accepter de travailler avec une cible mince, ce qui signifie une perte de statistique à temps égal dans les mesures.

2. Calcul des angles de cible

Il est plus commode de raisonner sur les énergies. Nous posons

(Figure 19)

$$A_1 = \frac{dE_1}{dX_1} \quad \text{gradient d'énergie correspondant à la dispersion du monochromateur,}$$

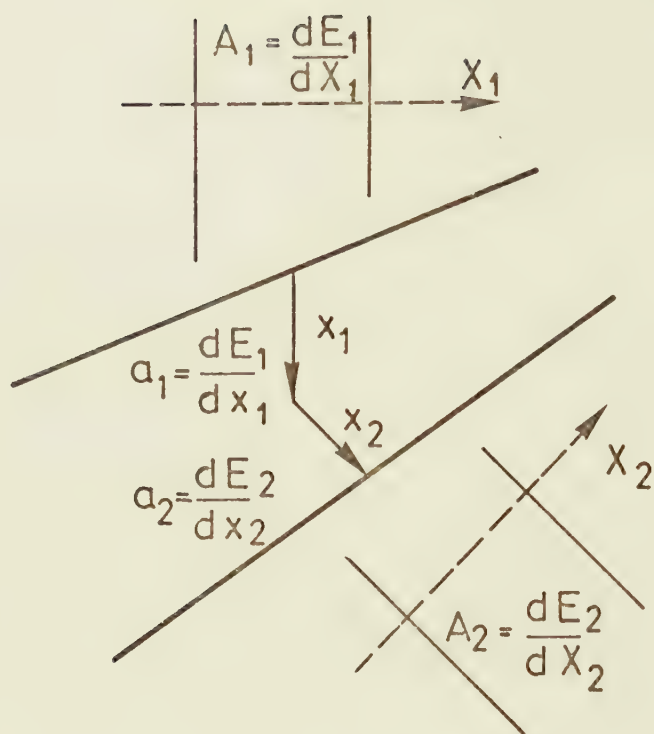


FIG. 19

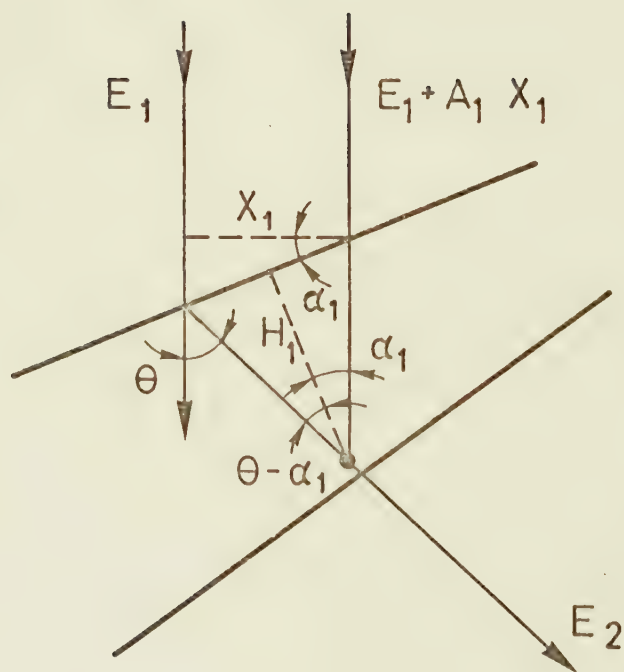


FIG. 20

$$A_2 = \frac{dE_2}{dx_2} \quad \text{gradient d'énergie correspondant à la dispersion de l'analyseur,}$$

$$a_1 = \frac{dE_1}{dx_1} \quad \text{absorption linéaire dans la cible avant diffusion,}$$

$$a_2 = \frac{dE_2}{dx_2} \quad \text{absorption linéaire dans la cible après diffusion.}$$

$A_1 \neq A_2$ car les énergies avant et après la cible, E_1 et E_2 , sont différentes. Nous conviendrons pour nous conformer au langage courant que E_1 et E_2 représentent les énergies cinétiques des particules. Dans ces conditions

$$A_{12} = \frac{E_{12}}{158} \left[1 + \frac{m_0 c^2}{E_{12} + m_0 c^2} \right] \quad \text{en MeV/c.}$$

$a_1 \neq a_2$ surtout lorsqu'on envisage une forte perte par excitation E_S . En fait a varie peu avec l'énergie et pour les calculs pratiques on peut prendre

$$a_1 \quad \text{correspondant à} \quad E_1 - \frac{E_T}{4},$$

$$a_2 \quad \text{correspondant à} \quad E_2 + \frac{E_T}{4},$$

E_T étant la perte moyenne par ralentissement.

On peut calculer l'inclinaison de la face d'entrée en remarquant que deux particules dont les trajectoires sont confondues après diffusion doivent posséder des énergies égales en sortant de la cible, quels que soient les points où les diffusions se sont effectivement produites.

Il vient avec les notations de la Figure 20.

$$\frac{H_1}{\cos \alpha_1} a_1 = \frac{H_1}{\cos (\theta - \alpha_1)} a_2 + A_1 X_1$$

et comme $X_1 = H_1 \frac{\sin \theta}{\cos (\theta - \alpha_1)},$

$$\frac{\cos (\theta - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} a_1 = a_2 + A_1 \sin \theta.$$

On peut calculer l'inclinaison de la face de sortie en remarquant que deux particules dont les trajectoires sont confondues avant diffusion doivent donner des énergies de sortie compatibles avec la

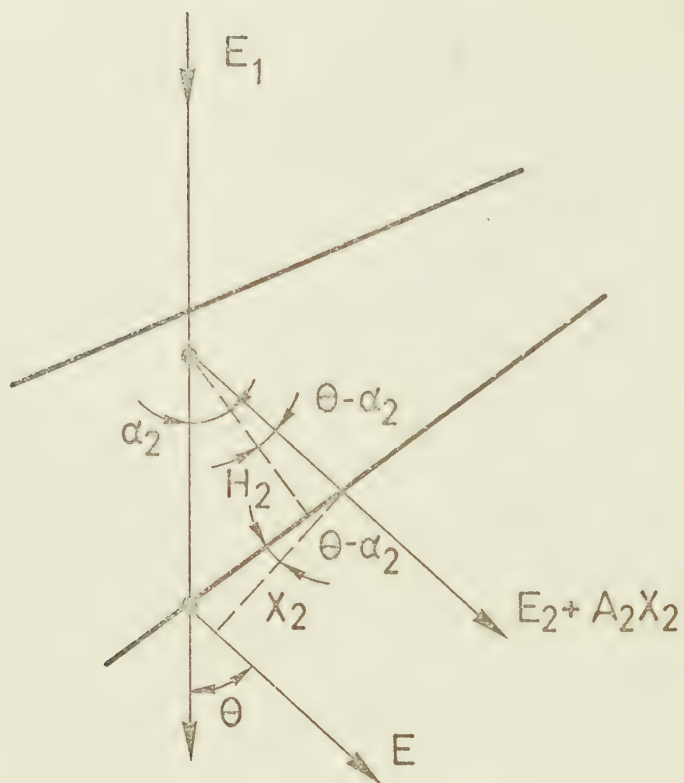


FIG. 21

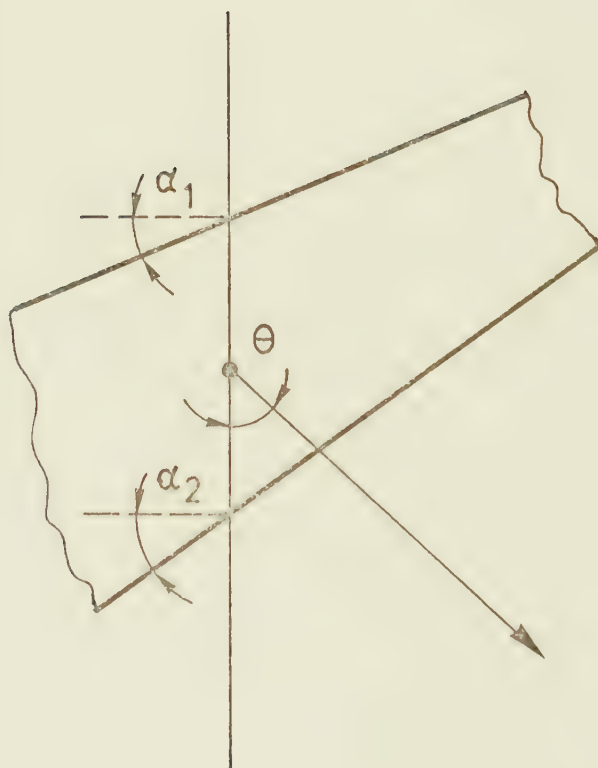


FIG. 22

dispersion de l'analyseur afin de focaliser au même point de l'hodoscope.

Il vient, avec les notations de la Figure 21.

$$\frac{H_2}{\cos \alpha_2} a_1 = \frac{H_2}{\cos (\theta - \alpha_2)} a_2 + A_2 X_2$$

et comme $X_2 = H_2 \frac{\sin \theta}{\cos \alpha_2}$,

$$a_1 = \frac{\cos \alpha_2}{\cos (\theta - \alpha_2)} a_2 + A_2 \sin \theta .$$

On trouve ainsi deux angles différents

$$\alpha_2 > \alpha_1 > \frac{\theta}{2}$$

tels que $\sin \theta \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a_2 + A_1 \sin \theta}{a_1} - \cos \theta$

et $\sin \theta \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{a_2}{a_1 - A_2 \sin \theta} - \cos \theta .$

Les angles sont comptés comme des angles d'incidence pour les trajectoires entrantes. On voit que la cible doit être disposée à l'inverse d'un prisme en optique (Figure 22).

Faisons une application numérique :

$$E_1 = 200 \text{ MeV}$$

$$E_2 = 182 \text{ MeV}$$

$$E_S = 10 \text{ MeV}$$

$$E_T = 8 \text{ MeV} ,$$

pour une cible de carbone de masse spécifique

$$\rho = 1,983 \text{ g/cm}^3,$$

on a $a_1 (198 \text{ MeV}) = 3,621 \text{ MeV/cm}.$

$$a_2 (184 \text{ MeV}) = 3,661 \text{ MeV/cm}.$$

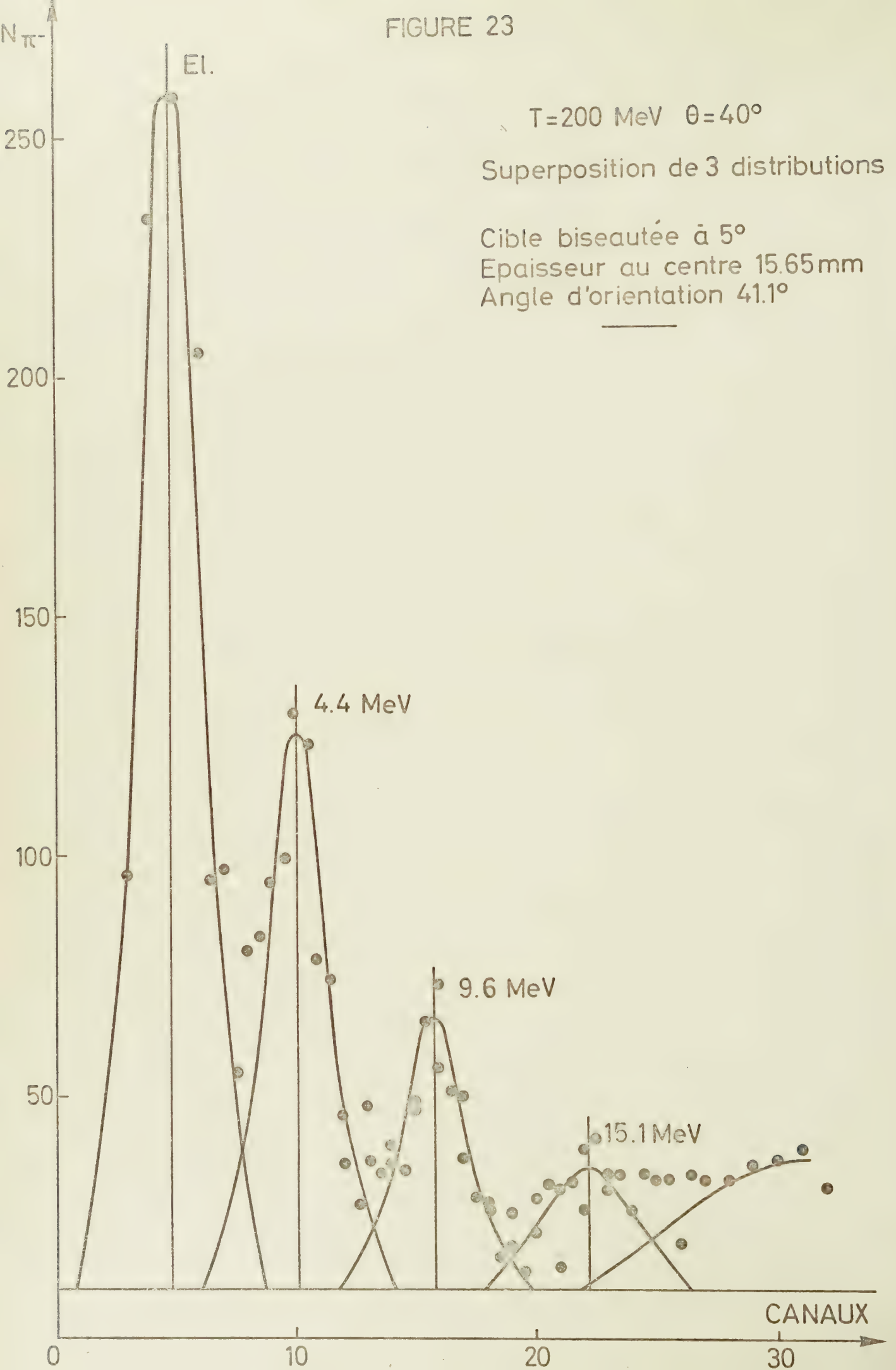
On trouve les résultats suivants :

θ	α_1	α_2	Angle ($^\circ$)	Epaisseur (cm)
30°	38,1	41,6	3,5	1,9
60°	47,3	53,5	6,2	1,8
90°	56,4	61,7	5,3	1,5
120°	65,9	68,2	2,3	1,1

Il ne reste plus qu'à choisir parmi les cibles dont on dispose. Pratiquement les valeurs angulaires varient peu avec E_S et E_T . On remarque en tout cas qu'elles sont très différentes de la valeur classique :

$$\alpha = \frac{\theta}{2} .$$

FIGURE 23



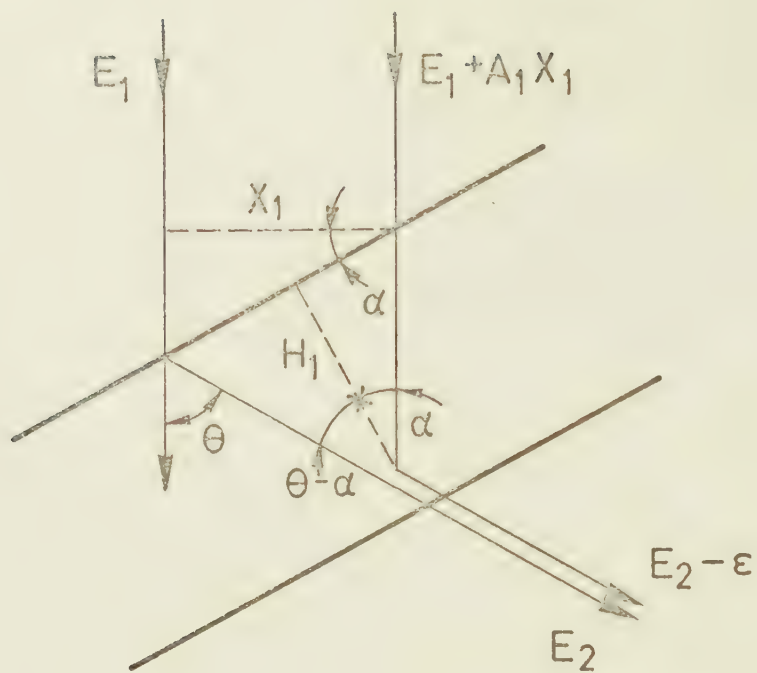


FIG. 24

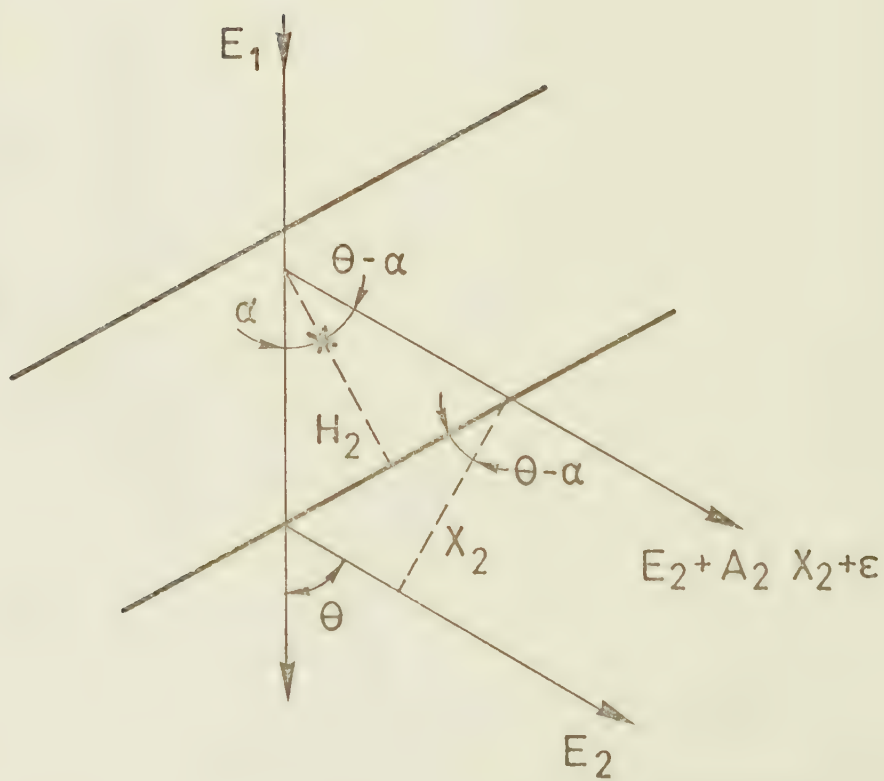


FIG. 25

Il nous a été facile de vérifier le bien fondé de ces calculs le jour où nous avons accidentellement placé une cible biseautée à l'envers. La figure 23 montre un spectre obtenu avec une cible biseautée. Les différents pics (élastique, 4,4, 9,6, 15 MeV) sont nettement séparés, malgré une épaisseur traversée qui donne une perte variant de 6 à 9 MeV.

3. Utilisation d'une cible parallèle

Les cibles biseautées présentent un inconvénient certain : on n'est jamais sûr de l'épaisseur moyenne traversée par le faisceau, valeur qu'il faut pourtant connaître dans le calcul des sections efficaces. Pour que cette épaisseur ne dépende pas d'un mauvais centrage où d'une mauvaise répartition du faisceau incident, il nous a paru préférable dans la plupart des cas d'utiliser des cibles parallèles, quitte à abandonner des épaisseurs de l'ordre de 2 cm pour des épaisseurs de 5 mm.

Le problème se pose donc d'évaluer le défaut d'adaptation résultant de l'emploi d'une cible parallèle, et de trouver à quelle condition ce défaut est minimal.

Modifions la Fig. 20 du § 2. et faisons le calcul pour un angle quelconque α de la face d'entrée. On trouve avec les notations de la Figure 24 un défaut d'énergie

$$\epsilon = \left[E_1 - \frac{H_1}{\cos(\theta - \alpha)} a_2 \right] - \left[E_1 + A_1 X_1 - \frac{H_1}{\cos \alpha} a_1 \right]$$

$$\text{ou encore } \frac{\epsilon}{H_1} = \frac{a_1}{\cos \alpha} - \frac{a_2}{\cos(\theta - \alpha)} - \frac{A_1 \sin \theta}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Modifions la Fig. 21 du § 2 et faisons le calcul pour un angle quelconque α de la face de sortie. On trouve avec les notations de la Figure 25 un défaut d'énergie

$$\epsilon = \left[E_1 - \frac{H_2}{\cos(\theta - \alpha)} a_2 \right] - \left[E_1 + A_2 X_2 - \frac{H_2}{\cos \alpha} a_1 \right]$$

$$\text{ou encore } \frac{\epsilon}{H_2} = \frac{a_1}{\cos \alpha} - \frac{a_2}{\cos(\theta - \alpha)} - \frac{A_2 \sin \theta}{\cos \alpha}.$$

Considérons maintenant deux diffusions identiques en des points quelconques A' et A'' de la cible. Prenons les notations de la Fig. 26 et imaginons une 3ème diffusion identique en A. On peut écrire :

$$E_2 - E'_2 = H' \left[\frac{a_1}{\cos \alpha} - \frac{a_2}{\cos(\theta - \alpha)} - \frac{A_1 \sin \theta}{\cos(\theta - \alpha)} \right]$$

$$E_2 - E''_2 = A_2 X_2 + H'' \left[\frac{a_1}{\cos \alpha} - \frac{a_2}{\cos(\theta - \alpha)} - \frac{A_2 \sin \theta}{\cos \alpha} \right].$$

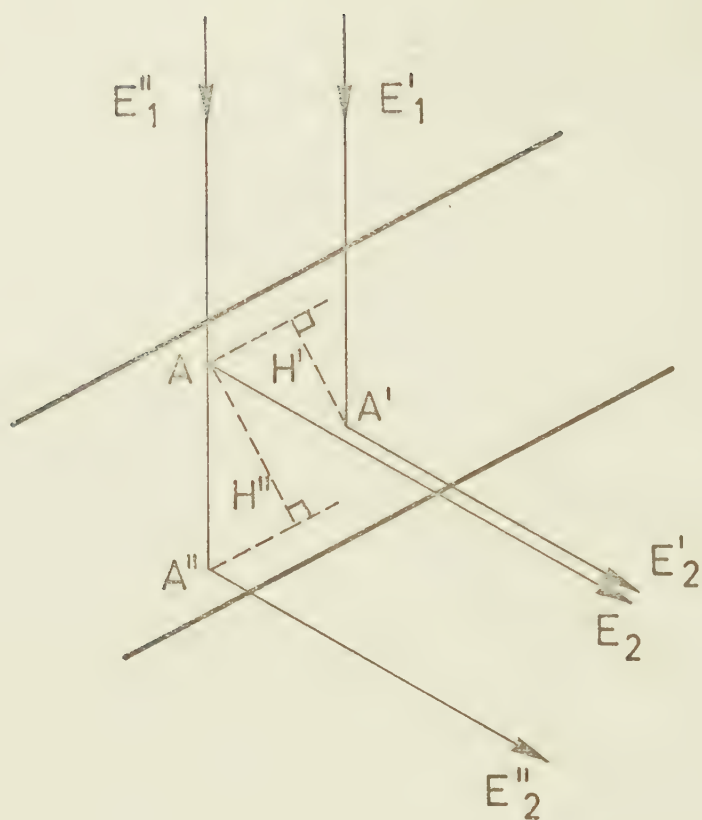


FIG. 26

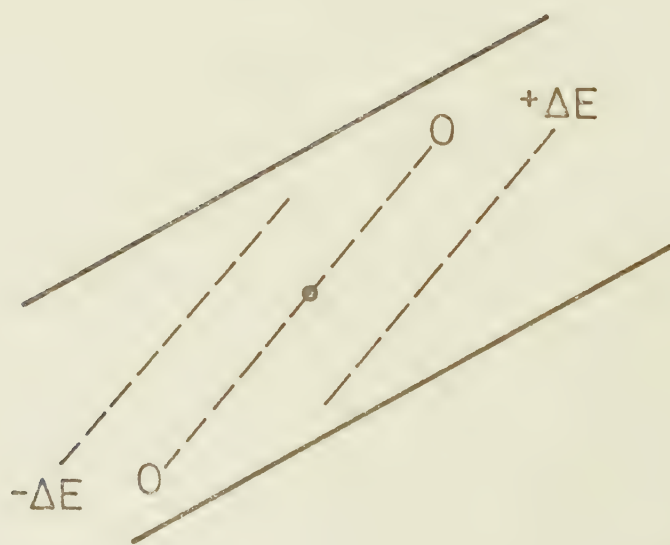


FIG. 27

La condition $E'_2 - E''_2 = A_2 X_2$ donne alors

$$H' \left[\frac{a_1}{\cos \alpha} - \frac{a_2}{\cos(\theta - \alpha)} - \frac{A_1 \sin \theta}{\cos(\theta - \alpha)} \right] = H'' \left[\frac{a_1}{\cos \alpha} - \frac{a_2}{\cos(\theta - \alpha)} - \frac{A_2 \sin \theta}{\cos \alpha} \right].$$

Cette relation définit une direction de plan.

A' et A'' doivent se trouver dans un même plan parallèle à cette direction pour que les deux particules arrivent au même point de l'hodoscope.

Par rapport au centre de la cible, on peut définir un plan d'adaptation parfaite

$\Delta E = 0$, et une famille de plans parallèles pour lesquels

$$\Delta E = C'H' + C''H'' = C\theta$$

est proportionnel à la distance avec le plan de référence (Figure 27).

Il y a intérêt à orienter la cible suivant la direction d'adaptation. Pour trouver cette direction il suffit de faire $H' = H''$ dans la relation établie plus haut, ce qui donne

$$\frac{A_1}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{A_2}{\cos \alpha}$$

ou encore $\sin \theta \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1}{A_2} - \cos \theta.$

Cette dernière relation est évidente dans le cas d'une cible idéalement mince.

Si $E_1 \neq E_2$ on a $A_1 - A_2 = \Delta A \neq 0$ et on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\theta}{2} + \Delta, \quad \text{avec un écart} \\ \Delta = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \frac{\Delta A}{A}. \end{array} \right.$$

En reprenant les valeurs numériques

$$E_1 = 200 \text{ MeV} \quad E_2 = 182 \text{ MeV},$$

$$\text{on trouve } A_1 = 1,787 \text{ MeV/cm} \quad A_2 = 1,653 \text{ MeV/cm}$$

et on obtient le tableau numérique suivant :

$\theta =$	30°	60°	90°	120°
$\alpha =$	23,3	33,9	47,2	61,3

On remarque que $\alpha \neq \frac{\theta}{2}$ à grand angle, même pour une perte d'énergie notable. On peut pratiquement toujours employer la formule approchée avec Δ .

Aucune correction n'est possible pour $\theta = 0$, angle pour lequel on ne peut d'ailleurs pas faire de mesure.

G. Solutions pratiques adoptées pour l'expérience $\pi^- 12C$

Nous savons que notre spectromètre peut nous permettre de travailler avec une résolution de l'ordre de 1/1000, avec les sextupôles en marche, une fente fine, un faisceau parfaitement réglé et une cible biseautée.

Pour des raisons d'exécution rapide du programme expérimental, nous avons pris des décisions draconiennes qui nous ont permis de mesurer en quelques mois les sections efficaces différentielles élastiques et inélastiques (4,4 MeV, 9,7 MeV et au-delà dans certains cas) entre 0 et 140° et pour 7 énergies entre 120 et 280 MeV.

Les solutions adoptées sont les suivantes :

- Nous avons pris un angle d'hodoscope $\phi' = 12,6^\circ$ et nous avons coupé tous les courants dans les sextupôles.

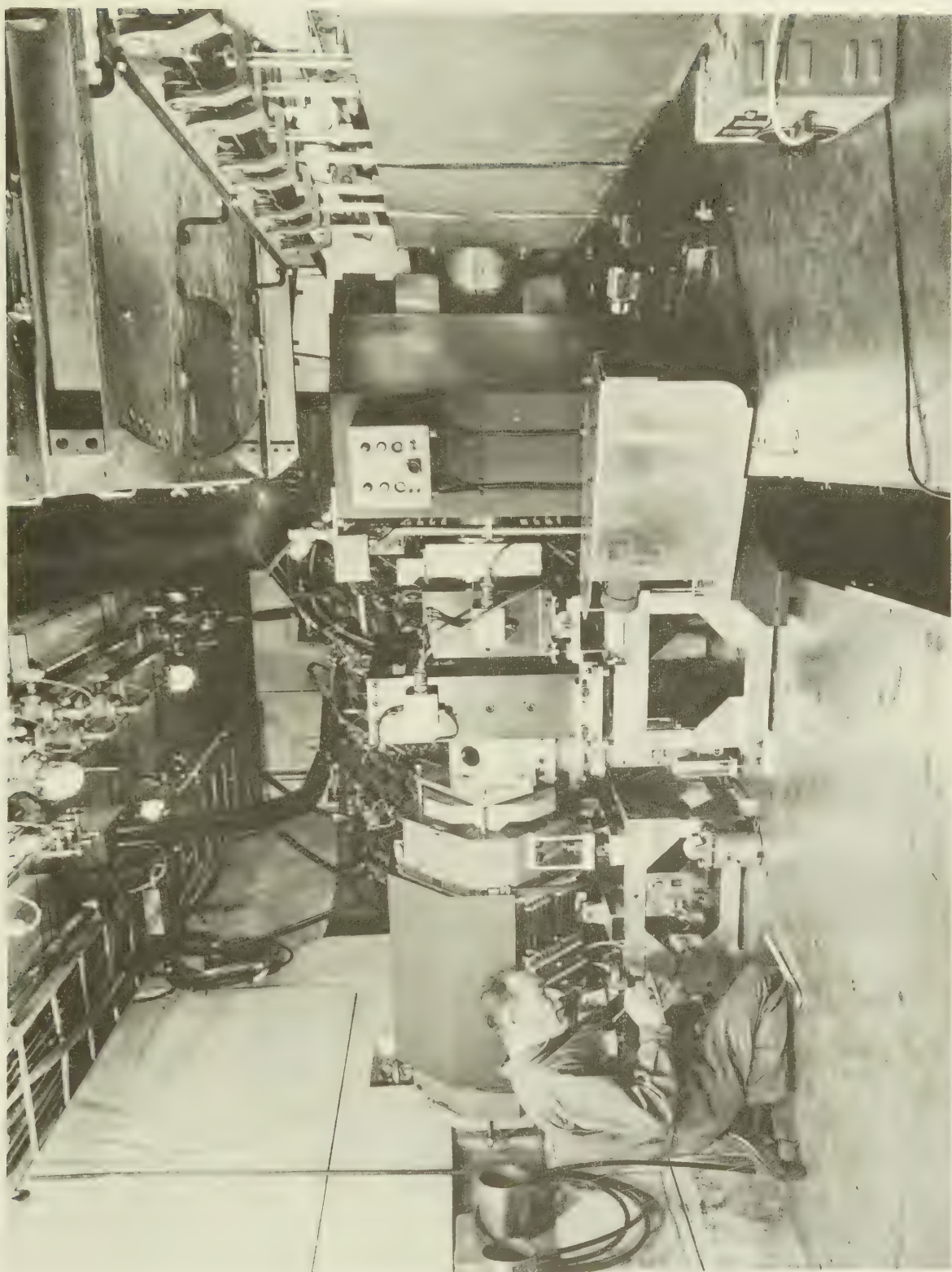
- Nous avons fait la plupart des mesures avec des cibles parallèles et une largeur de fente de 8 mm.

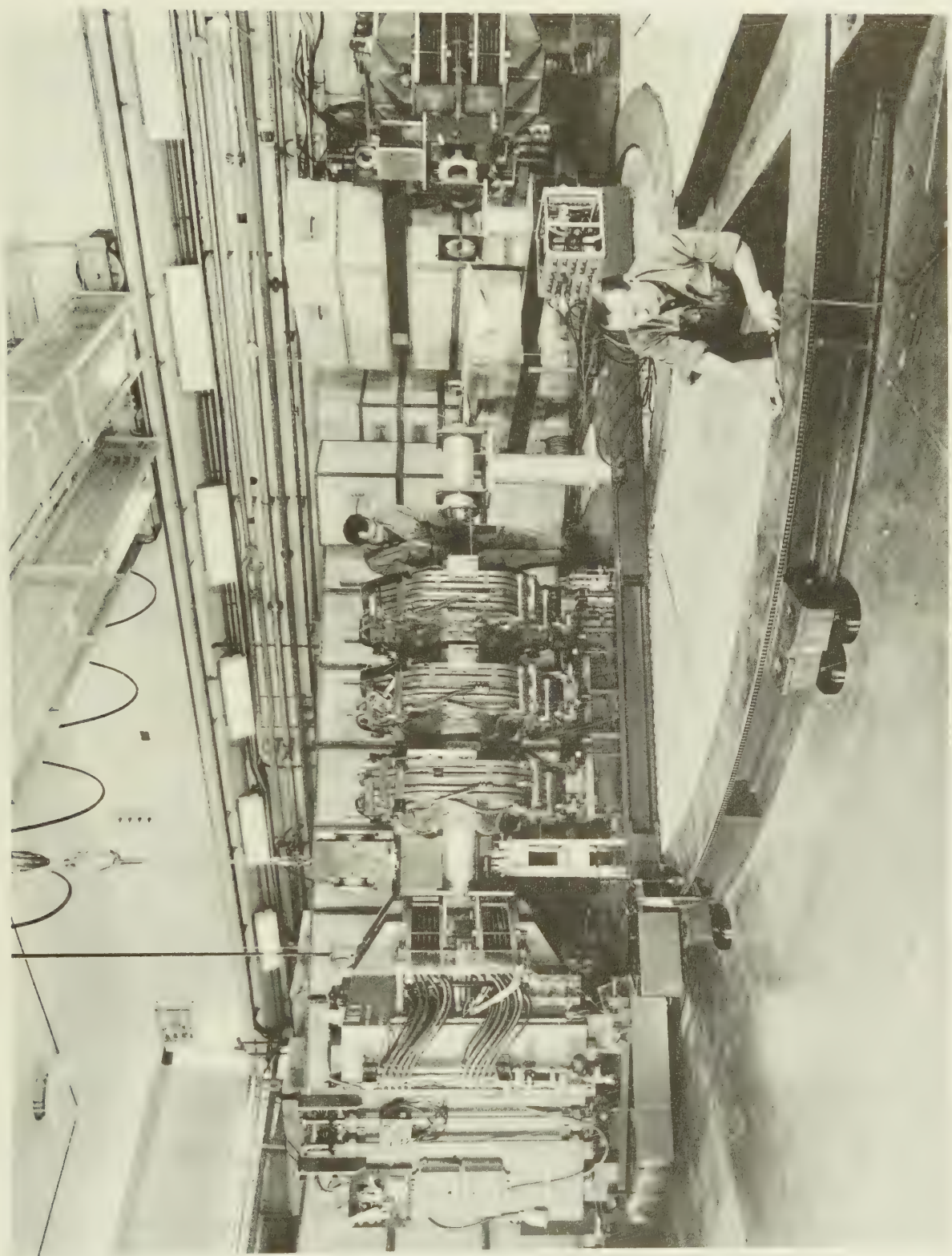
La résolution effective est alors réduite à 0,5 % en quantité de mouvement, ce qui correspond approximativement à 1,5 MeV en énergie. Cette résolution est suffisante pour observer correctement les distributions élastiques et inélastiques et elle est encore la meilleure actuellement réalisée avec des pions à ces énergies.

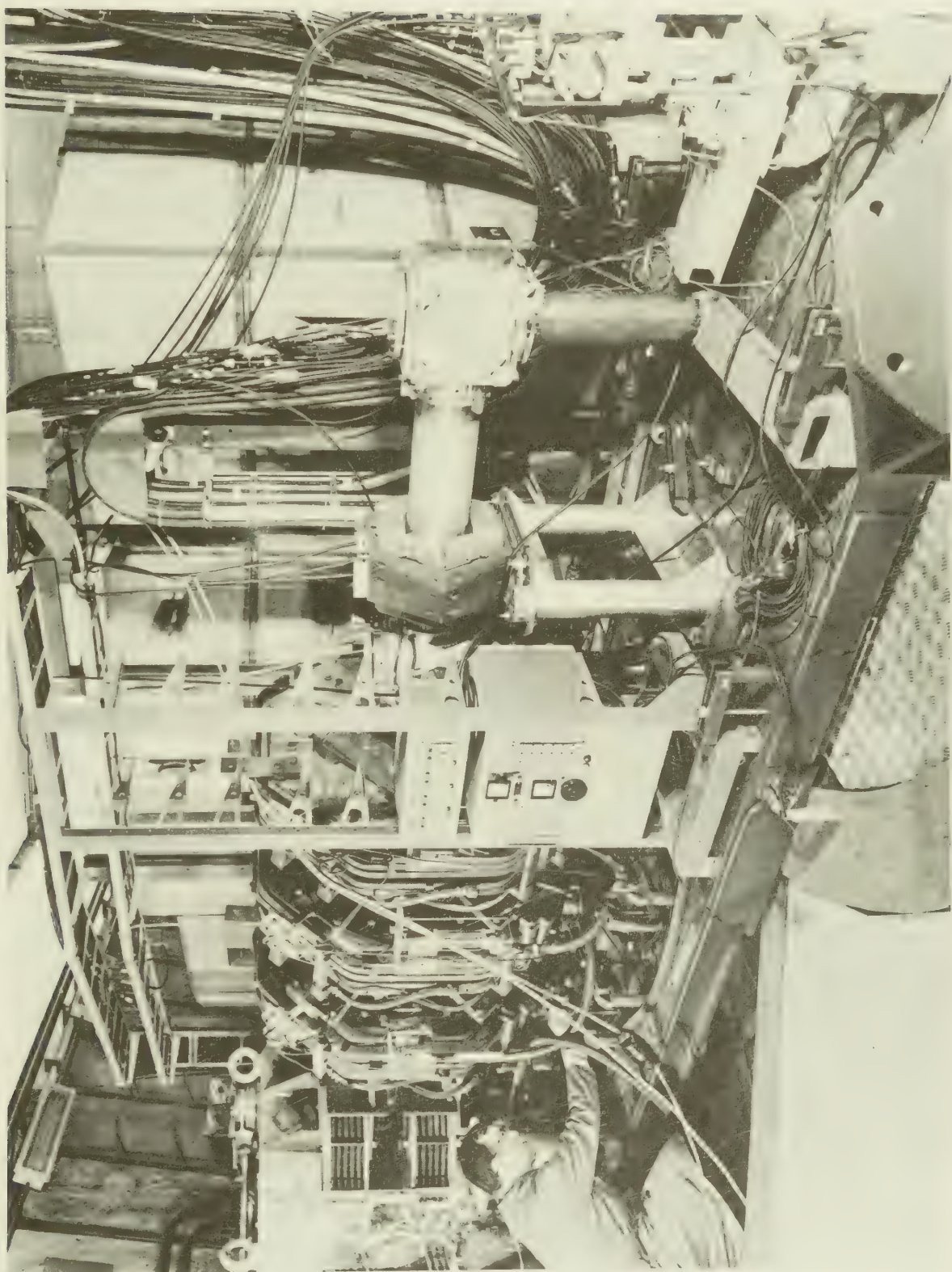
Bien entendu les études théoriques et pratiques qui ont été faites dans le but d'obtenir une résolution de 1/1000 restent acquises et profiteront en partie aux expériences futures actuellement en préparation.

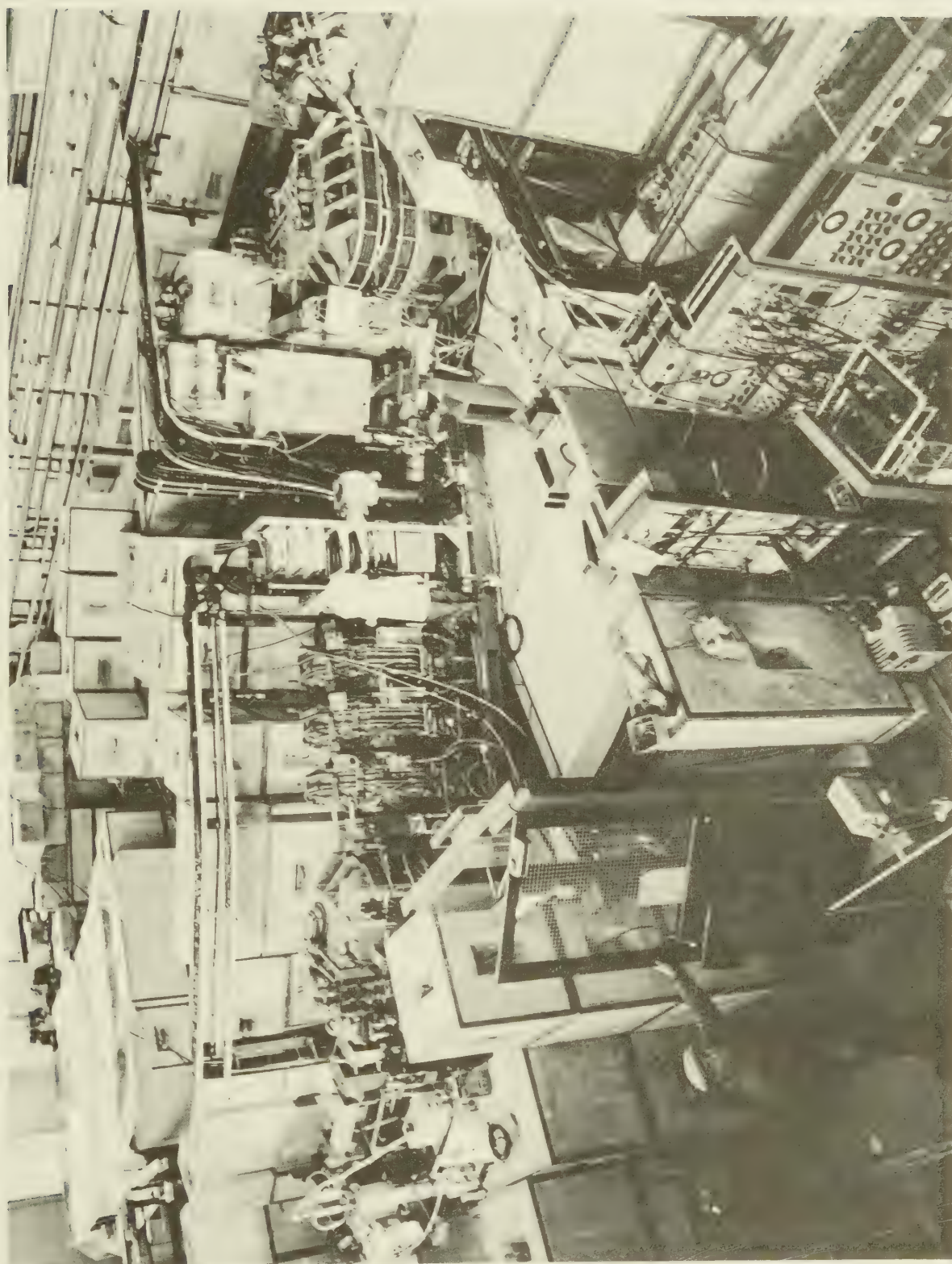
P H O T O G R A P H I E S :

1. Le faisceau de pions en sortie de machine
2. Mise en place du double spectromètre
3. Mise en service du double spectromètre
4. Vue d'ensemble du double spectromètre.









DEUXIEME PARTIE

MESURES ET TRAITEMENT DES DONNEES

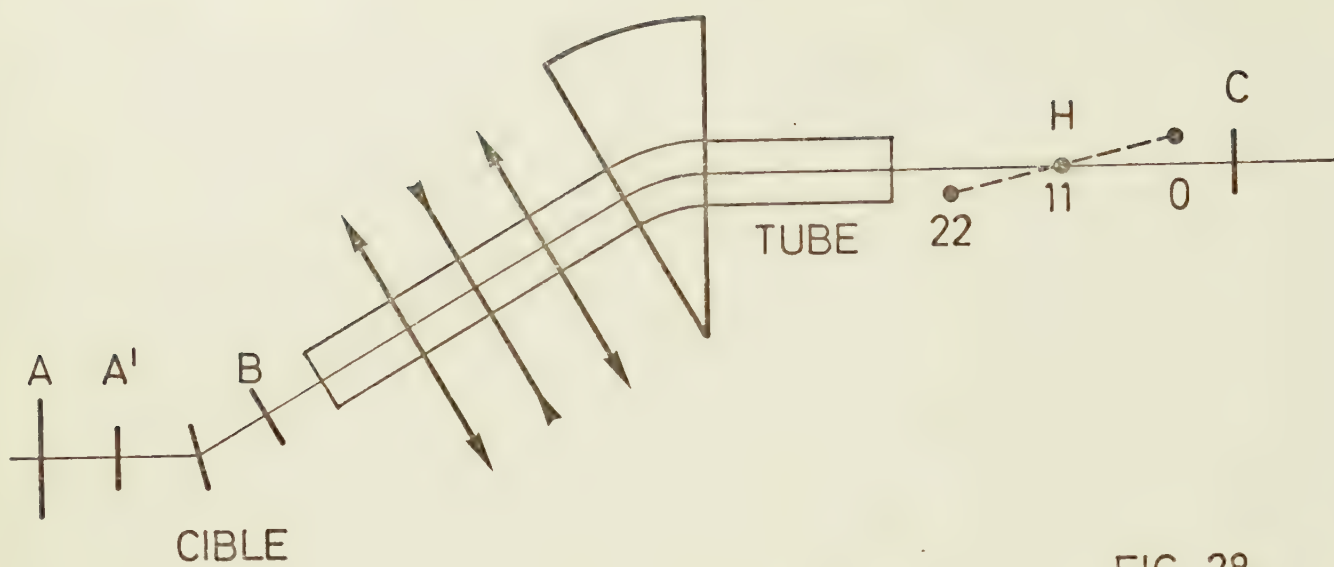


FIG. 28

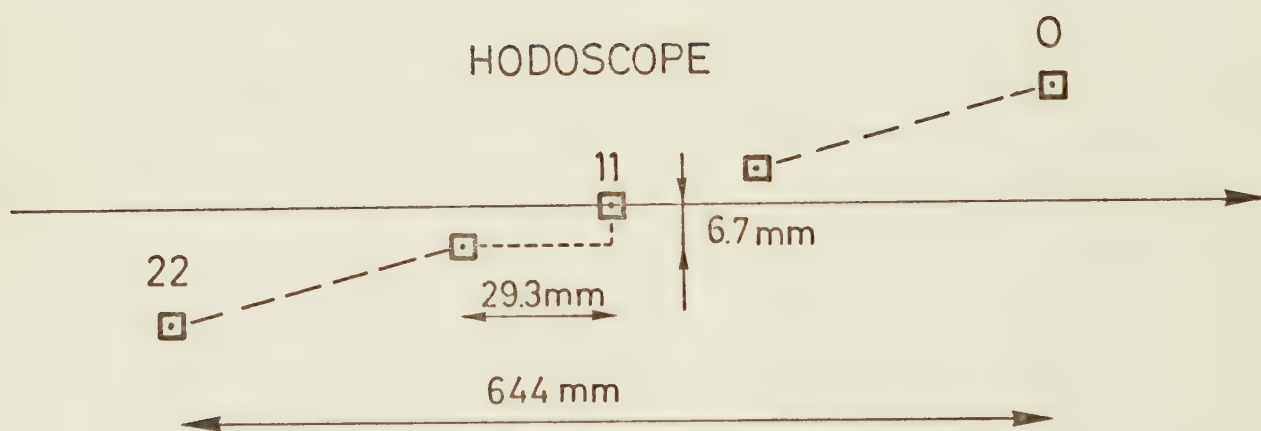


FIG. 29

C H A P I T R E I V

MESURE DES SECTIONS EFFICACES DIFFERENTIELLES

A. Contrôles et mesures

1. Les détecteurs

Le contrôle du faisceau s'effectue au moyen de plusieurs détecteurs, dans l'ordre (Figure 28) :

- Deux scintillateurs A et A' en coïncidence, disposés à la sortie du monochromateur et constituant le moniteur du faisceau,
- Un scintillateur de définition B, entre la cible et le tube à vide de l'analyseur,
- Un hodoscope de 23 canaux suivi d'un scintillateur de recouvrement C.

Le détecteur A (100 mm x 100 mm x 2 mm) sert uniquement à éliminer le bruit de fond lorsqu'il est mis en coïncidence avec A'.

Le détecteur A' se trouve à 150 mm de A et à 90 mm de la cible. La hauteur utile du faisceau est à cet endroit de 20 à 25 mm, mais il faut compter entre 30 et 35 mm horizontalement, à cause de la bande de quantité de mouvement dispersée par le monochromateur et qui peut atteindre 2 %. A' fait 30 mm de hauteur, 45 mm de largeur et 0,5 mm d'épaisseur (pour réduire l'absorption). Comme on travaille avec des cibles de 100 mm de largeur, les 45 mm de A' autorisent sans ennui une rotation de cible de plus de 60° (au-delà il faut tourner A').

Le détecteur B se trouve à 80 mm de l'autre côté de la cible et fait 30 mm de hauteur, 60 mm de largeur et 0,5 mm d'épaisseur. Il est un peu plus large que A' de façon que tous les points éclairés de la cible puissent diffuser dans un angle solide constant.

Les canaux de l'hodoscope sont des baguettes verticales de dimensions 4,75 mm x 4,75 mm x 138 mm disposées comme l'indique la Figure 29. Les niveaux excités les plus élevés donnent des pics du côté des canaux de numéros plus élevés.

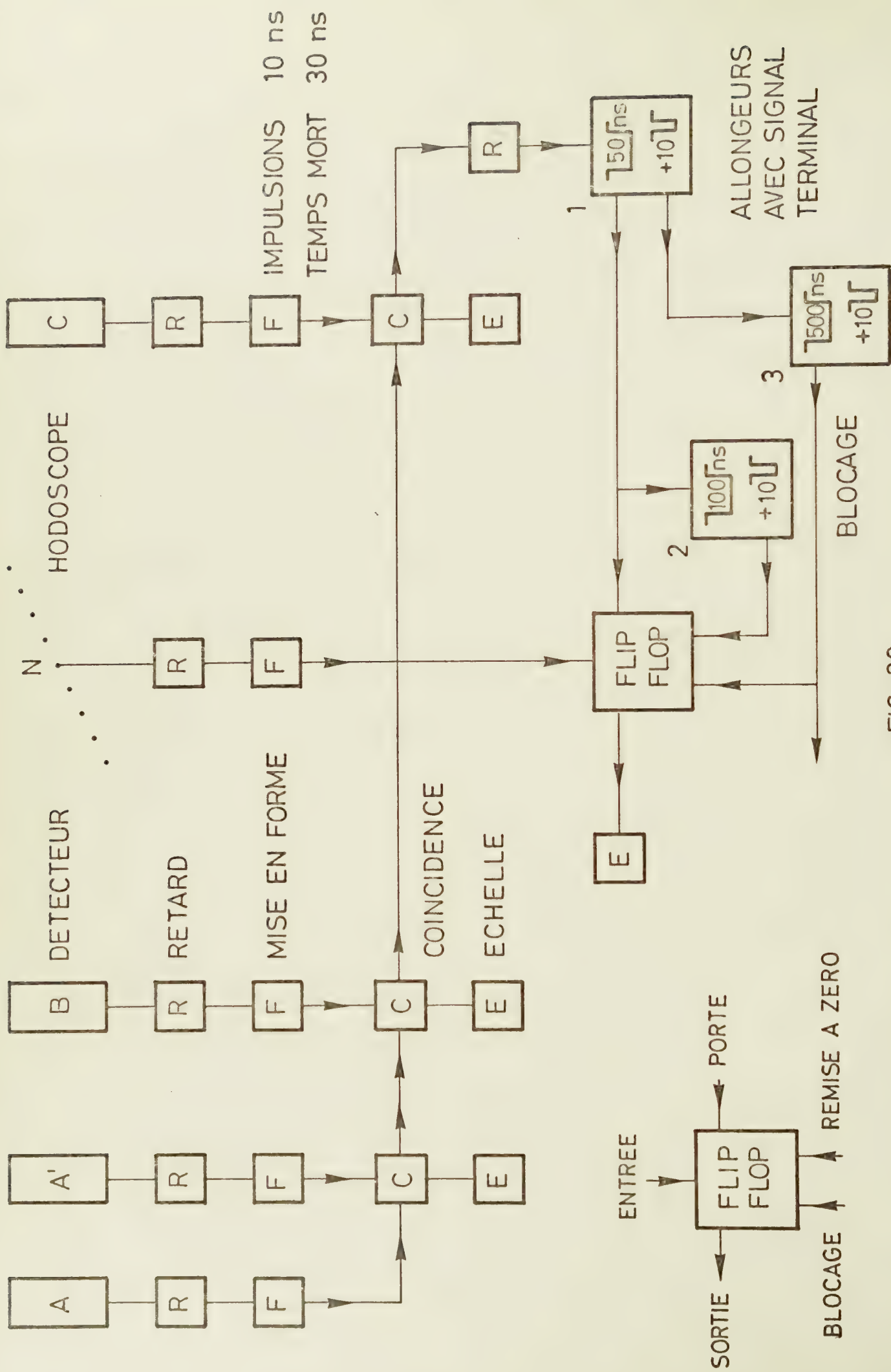


FIG. 30

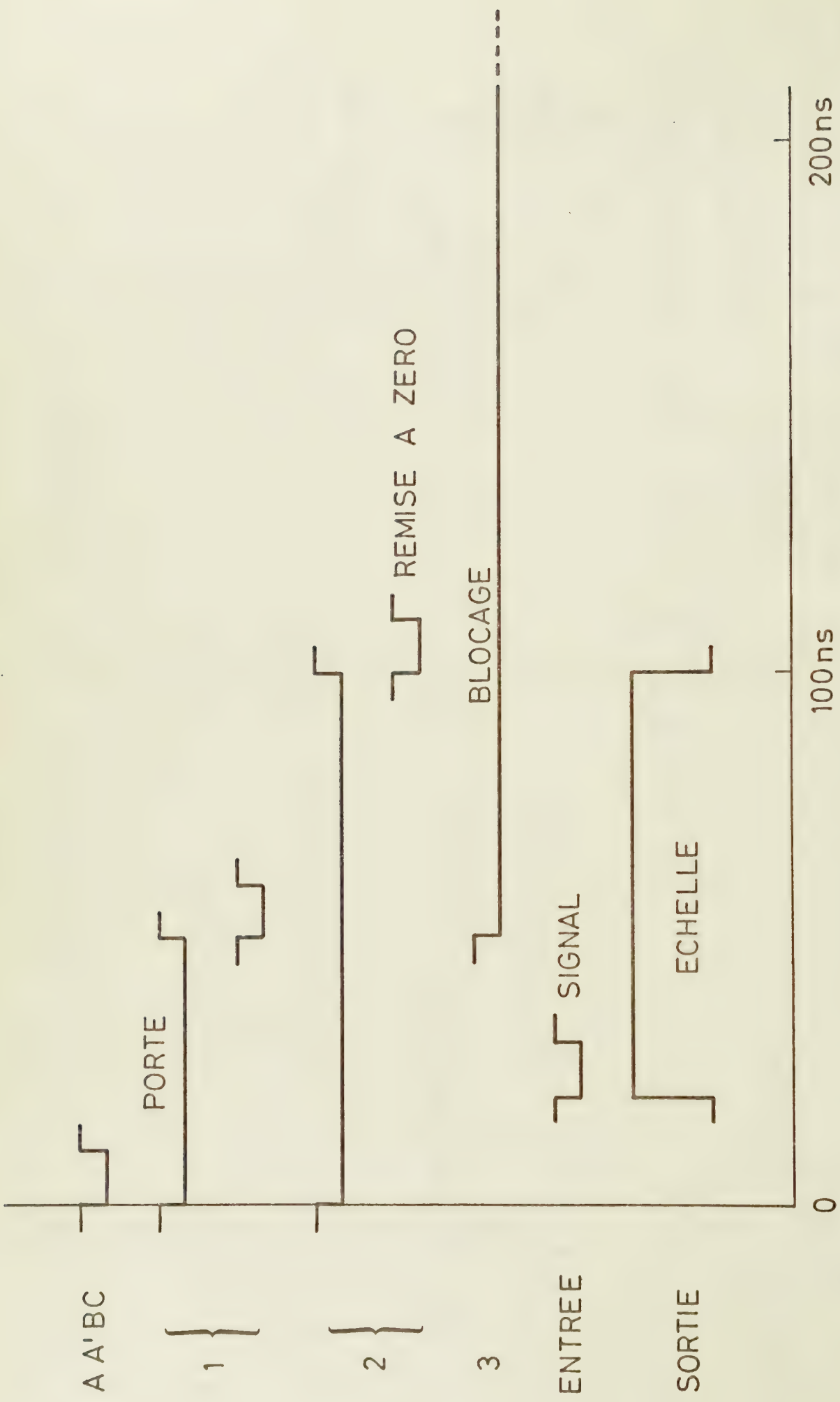


FIG. 31

Le détecteur terminal C fait 120 mm de hauteur, 200 mm de largeur et 3 mm d'épaisseur.

2. L'électronique

Les signaux de l'hodoscope font basculer des circuits bistables qui sont connectés aux échelles de comptage. L'ouverture de ces circuits et leur remise à zéro sont obtenues à partir du signal de déclenchement AA'BC (trigger) au moyen d'un système logique représenté sur la Figure 30. Un signal de blocage de 500 ns est créé après chaque enregistrement pour permettre la restauration des circuits. Voir Figure 31 pour la chronologie des différents niveaux.

Toutes les échelles sont commandées par un circuit porte supplémentaire qui les empêche de fonctionner durant la partie non stochastique du cycle d'éjection.

Les signaux des différents détecteurs sont amenés par câbles jusqu'à la salle de contrôle où se trouve l'électronique, à une certaine de mètres de la salle d'expérience. Il en est de même du signal de résonance nucléaire pour la mesure des champs magnétiques. Tous les courants (aimants, lentilles, alimentations diverses) sont réglables depuis la salle de contrôle. On peut également commander à distance les rotations de la cible et de l'analyseur, les déplacements de certains compteurs ...

3. Réglages et essais

On procède aux réglages avec l'analyseur à 0 degré, la cible étant remplacée par un scintillateur en forme de baguette (2 mm x 2 mm x 45 mm) mis exactement au centre de la plateforme et remplaçant le compteur B normal dans l'électronique.

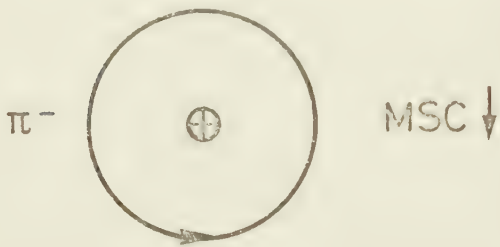
On met la cible interne en position et on fixe les courants aux valeurs données par des courbes de réglage établies expérimentalement (Figure 32,33). Le champ de l'aimant analyseur est fixé une fois pour toutes en fonction de l'énergie des pions. Il reste à retoucher les différents éléments dans l'ordre du faisceau (Voir Figure 34).

{ Aimant MSS (courant et rotation)
 Doublet du faisceau de sortie

{ Triplet LM1 - LM2 - LM3
 Aimant du monochromateur
 Triplet LA1 - LA2 - LA3 .

FIGURE 32

Réglage du faisceau de sortie
Lectures potentiométriques



AMP

MSS ↑
L1 ↑
L2 ↓

Position canal μ

600

Azimuth
cible
30°

L1
L2

400

20°

Courant MSS

200

Rotation MSS

100

200

300

400

p_{π}

FIGURE 33

Réglage du spectromètre
Lectures potentiométriques

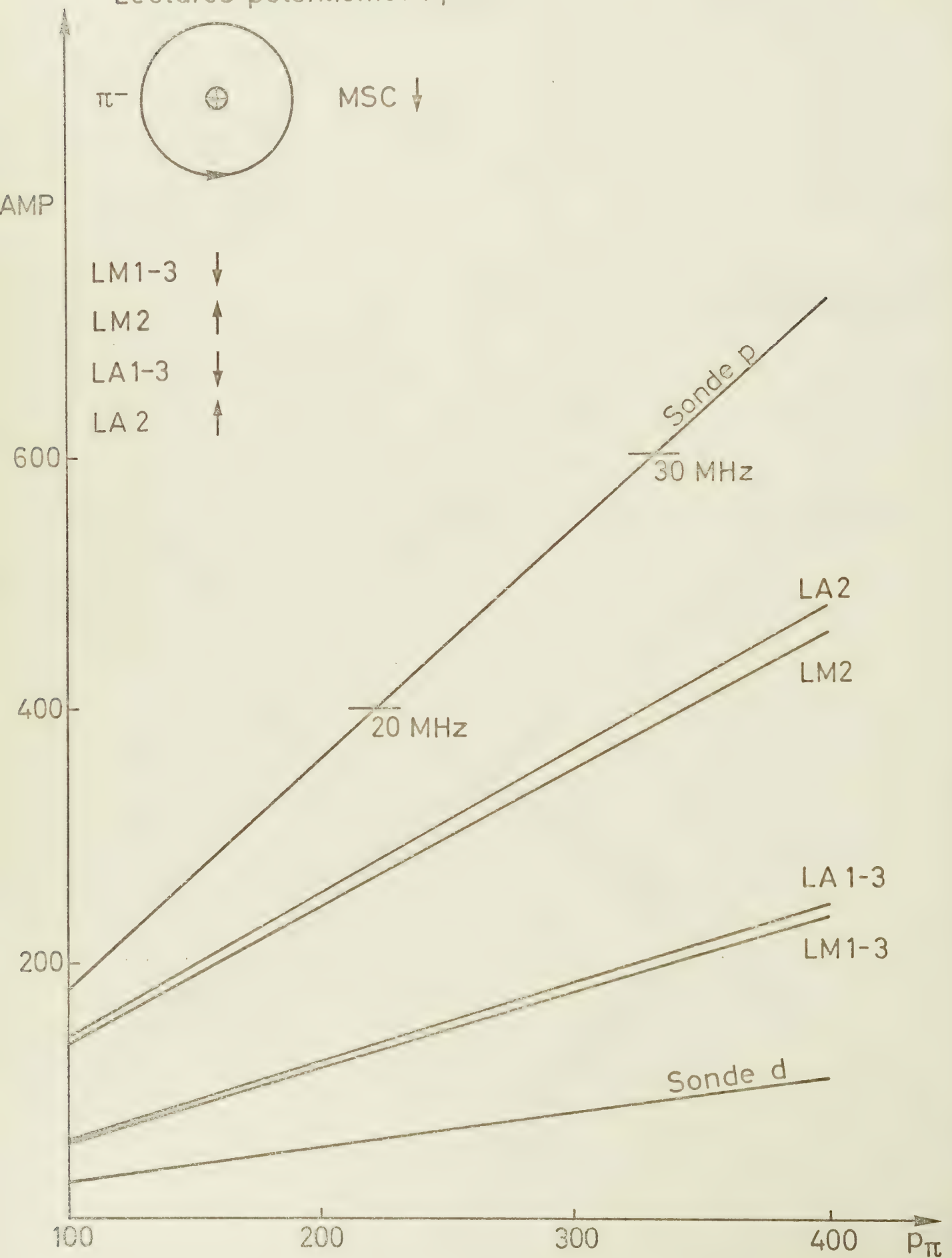
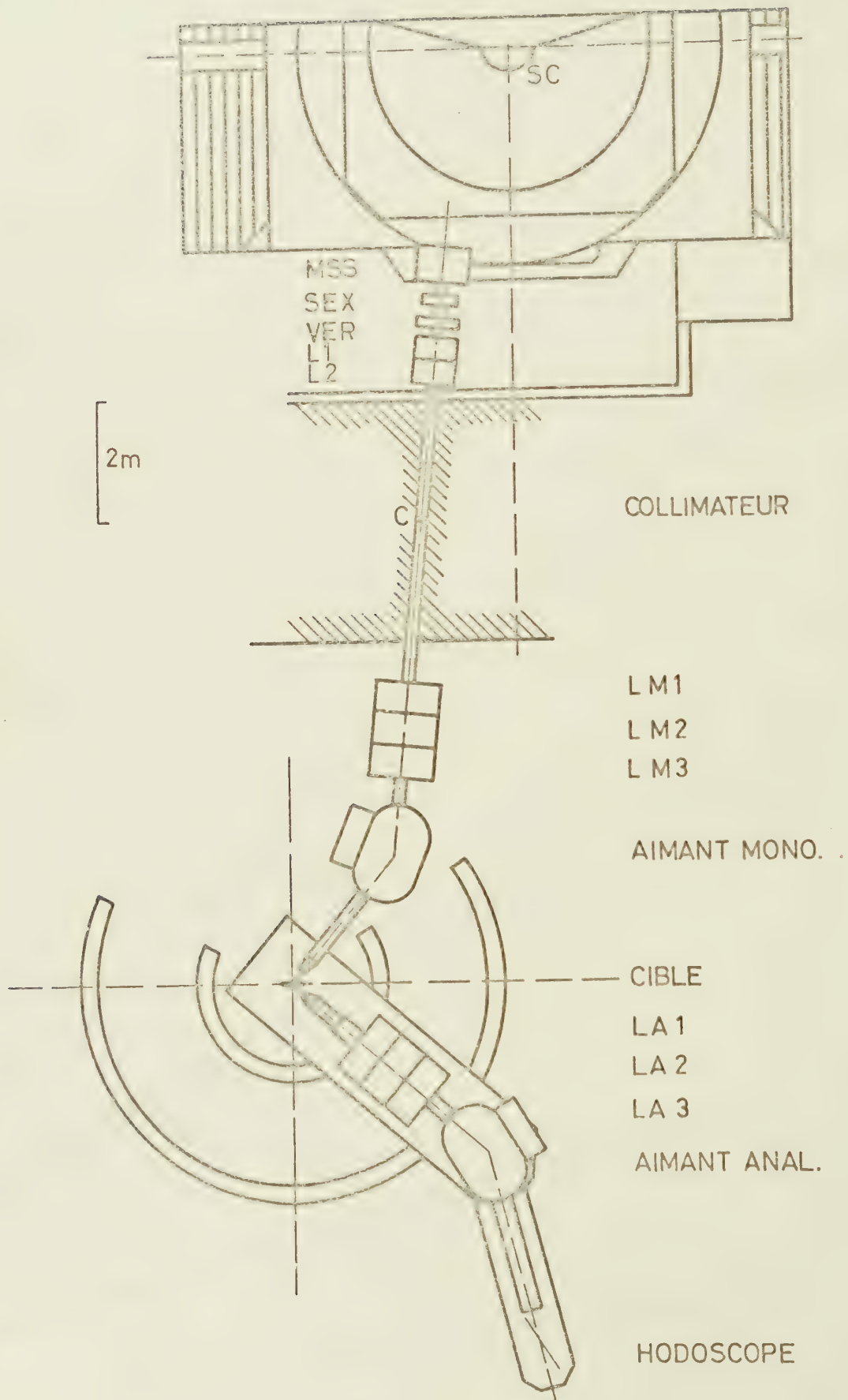


FIGURE 34



Il faut reprendre dans l'ordre plusieurs fois. On contrôle le centrage du faisceau et son intensité au moyen d'intégrateurs branchés sur les canaux 10 et 12 au centre de l'hodoscope.

On termine le réglage en ajustant le sextupôle et l'aimant de correction verticale du faisceau de sortie. Il faut enfin mettre la cible en place et procéder à un comptage dans les conditions normales de façon à mesurer la résolution. Les courants de l'analyseur doivent être légèrement retouchés pour amener le pic élastique sur les premiers canaux de l'hodoscope (perte d'énergie dans la cible).

Nous donnons à titre indicatif la courbe de dispersion (Fig.35) qui donne les déplacements sur l'hodoscope en fonction des variations de quantité de mouvement, simulées par des variations de courant. Les points qui figurent correspondent à des mesures faites à toutes les énergies, à 0 degré ou à 20 degrés. Cette courbe est d'utilisation courante et permet de localiser les pics des niveaux excités avec une précision de l'ordre de 0,1 MeV.

4. Equation générale

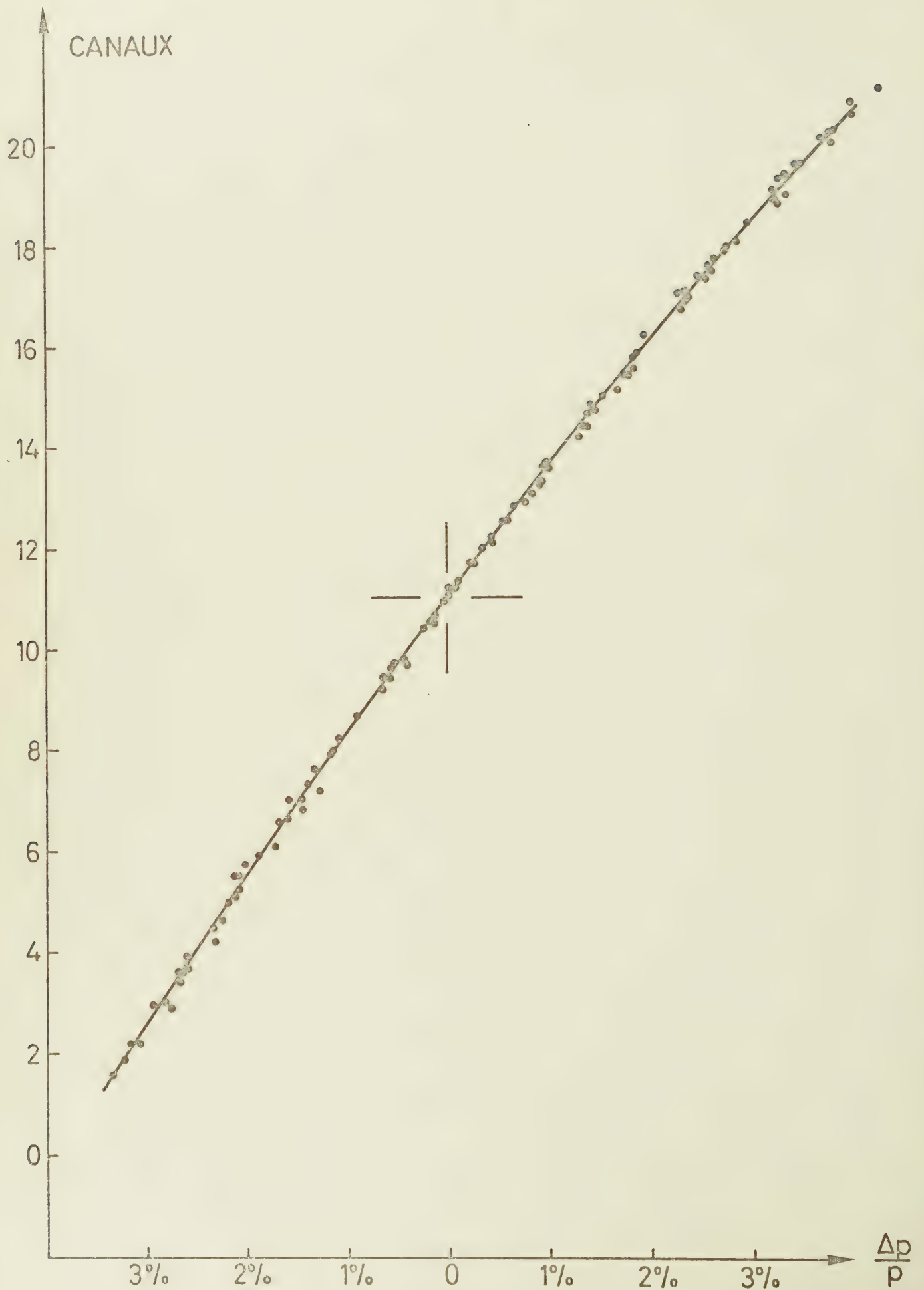
Le taux de comptage intégré sous le pic considéré est donné par la relation :

$$n = n_0 (1 + C_A) \frac{Nm}{A \cos \alpha} \Delta \Omega \xi_B \xi_C \xi_K \times \\ \left[P_K (1 - a) p_\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\pi + p_e \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_e + p_\mu \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\mu \right],$$

avec

n_0	nombre de particules incidentes (moniteur)
C_A	correction sur le moniteur tenant compte des défauts de l'électronique
N	nombre d'Avogadro
A	nombre de masse des noyaux cibles
m	masse de la cible par unité de surface
α	angle de la cible
$\Delta \Omega$	angle solide d'acceptance de l'analyseur
ξ_B	efficacité du compteur B
ξ_C	efficacité du compteur C
ξ_K	efficacité du $K^{i\text{ème}}$ canal de l'hodoscope où se trouve centré le pic
P_K	proportion des pions non désintégrés entre le moniteur et le $K^{i\text{ème}}$ canal
p_π	proportion des pions dans le faisceau incident
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\pi$	section efficace à déterminer

FIGURE 35



P_e contamination en e

$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_e$ section efficace coulombienne des e

P_μ contamination en μ

$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_\mu$ section efficace coulombienne des μ

Mises à part les sections efficaces coulombiennes, calculées avec le facteur de forme de Hofstadter⁽⁵⁴⁾, toutes les autres quantités sont à déterminer.

B. Détermination des paramètres

1. Les défauts de l'électronique

Examinons tout d'abord le fonctionnement du moniteur. Admettons un taux de comptage $n = 10^5$ pions par seconde, ou plus exactement, 10^5 pions par F seconde, chaque seconde, F étant le cycle utile de la machine (de l'ordre de 20 %).

Le problème des coïncidences fortuites se pose lorsqu'on a un rayonnement de forte dispersion angulaire et qu'on désire en sélectionner une fraction dans une direction donnée : les compteurs utilisés peuvent être déclenchés par des particules différentes mais simultanées. Le faisceau qui traverse nos détecteurs A et A' est compris dans un angle solide de l'ordre de 10^{-3} stéradian. A l'efficacité près (qui importe peu dans un moniteur) chaque particule donne deux signaux dans A et A' avec un écart de 0,5 ns.

Dans ces conditions, compte tenu de ce que les particules n'appartenant pas au faisceau sont relativement rares, il ne saurait être question de coïncidences fortuites et de correction à ce titre. Il n'empêche, bien entendu, que si on met un grand retard entre A et A', on comptera un taux de coïncidences accidentelles donné par la formule

$$\frac{\Delta n}{n} = 2\tau \frac{n}{F} \quad \text{où } \tau \sim 10 \text{ ns} \text{ est le temps de résolution de la}$$

coïncidence. En fait cette mesure est une mesure du cycle utile.

Nous avons affaire à un problème de temps mort : entre l'instant où une coïncidence AA' est comptée sur l'échelle du moniteur et l'instant où cette échelle reçoit le signal de blocage, il s'écoule ~ 60 ns (voir plus haut). Comme le temps mort des circuits de mise en forme vaut 30 ns (celui des coïncidences est bien plus faible), il reste encore 30 ns pour que le moniteur enregistre une autre particule.

Par contre les retards de l'hodoscope sont tels que la première particule donne un signal à peu près au milieu du signal porte, si bien que les canaux peuvent encore enregistrer durant les 30 ns qui suivent mais pas au-delà.

En bref, après la particule qui déclenche le système, le moniteur peut compter alors que les canaux sont dans l'impossibilité de le faire et vice-versa, ce qui correspond à un excès ou défaut de comptage.

$$\frac{\Delta n}{n} = 30 \cdot 10^{-9} \frac{10^5}{0,2} = 1,5 \% \text{ environ,}$$

les deux effets se compensant pratiquement.

En tout état de cause, nous conviendrons de prendre $C_A = 0$ et plus précisément

$$1 + C_A = 1 \pm 1 \% \text{ dans les calculs.}$$

$$2. \text{ Evaluation de } M = \frac{m}{\cos \alpha}$$

Les cibles utilisées (100 mm x 100 mm) ont une épaisseur $l = 0,5 \text{ cm} \pm 1 \%$, et une masse spécifique $\rho = 1,98 \text{ g/cm}^3 \pm 1 \%$ pouvant varier localement ou d'un échantillon à l'autre.

Il est logique d'admettre une incertitude sur la masse superficielle $\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 = \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2$.

Par ailleurs, si on prend $\alpha = 60^\circ$ et $\Delta \alpha = 0,5^\circ$ on a :

$$\frac{\Delta \cos \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \cdot \Delta \alpha = 1,732 \frac{0,5}{57,3} = 1,5 \%$$

Finalement on peut évaluer

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 = \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \cos \alpha}{\cos \alpha}\right)^2$$

$$\text{d'où } \frac{\Delta M}{M} = 2,1 \%$$

3. Angle solide de l'analyseur

La mesure de l'angle solide est élémentaire : on place au centre du spectromètre un diffuseur de carbone de 1 cm d'épaisseur et on tourne l'analyseur de 20° afin de ne pas être gêné par une structure éventuelle du faisceau incident.

Le tube à vide de l'analyseur comporte un caisson d'accès avant les lentilles, dans lequel on dispose un diaphragme de rayon R . Si D est la distance à la cible, on a

$$\frac{\pi R^2}{D^2} \frac{1}{n} = \frac{\Delta \Omega}{n_0} \text{ où } n \text{ et } n_0 \text{ sont les taux de comptage pour le même}$$

moniteur, avec et sans diaphragme. Les mesures ont été faites pour plusieurs diaphragmes et à chaque énergie. On a obtenu

$\Delta\Omega = 3,81 \cdot 10^{-3}$ stéradian $\pm 1,8$ %, ce qui correspond à un cône de demi-angle au sommet $\omega \approx 2^\circ$.

4. Efficacité des compteurs

L'efficacité du compteur B a été déterminée en disposant un autre compteur B' immédiatement derrière B et en mesurant le rapport

$$\frac{\text{coïncidence (AA'BB')}}{\text{coïncidence (AA' B')}} = 0,905 \pm 0,1 \, \%$$

La variation d'efficacité le long de l'hodoscope est une fonction sensiblement linéaire du numéro du canal. Cette variation est due au fait que les trajectoires semblent provenir d'un point au centre de l'aimant, à la distance F, et n'arrivent pas sous le même angle en différents points de l'hodoscope qui paraît ainsi plus ou moins transparent (Voir Chapitre I).

Nous avons fait des mesures relatives à 20° avec une cible de carbone de 1 cm d'épaisseur. Il suffit de déplacer le pic sur l'hodoscope pour évaluer une variation d'efficacité de l'ordre de 1% par canal quelle que soit l'énergie des particules.

Pour obtenir l'efficacité absolue au centre de l'hodoscope, et en même temps l'efficacité du détecteur de recouvrement C, nous avons opéré dans des conditions statistiques optimales, c'est-à-dire à 0° sans cible et avec des pions de 180 MeV. Un scintillateur supplémentaire C', juste assez grand pour intégrer le pic quelle que soit sa position, était mis en place derrière C sur un mécanisme de déplacement horizontal. C' faisait 50 mm de largeur, 140 mm de hauteur et 10 mm d'épaisseur. Le circuit porte de l'hodoscope était ouvert par les coïncidences AA'BCC' et on pouvait calculer

$$\text{efficacité de H} = \frac{\text{pic intégré}}{\text{AA'BCC'}},$$

$$\text{efficacité de C} = \frac{\text{AA'BCC'}}{\text{AA'B C'}}.$$

Les résultats des mesures sont les suivants :

variation d'efficacité par rapport au 11ème canal

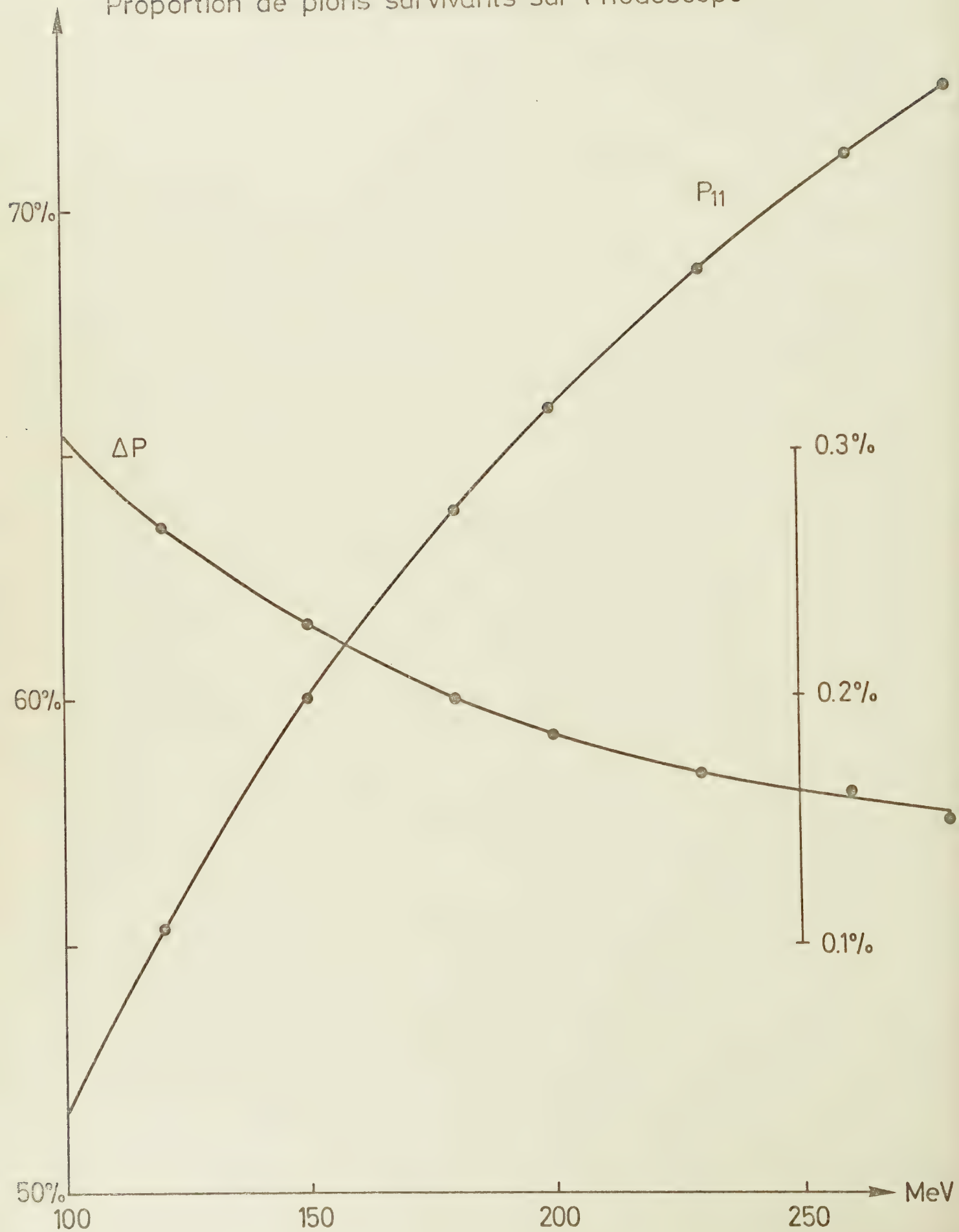
$$\Delta\xi_K = - (1,25 \pm 0,15)(K - 11) \, \%,$$

efficacité du 11ème canal $\xi_{11} = 0,788 \pm 0,7 \, \%$,

efficacité du compteur C $\xi_C = 0,976 \pm 0,2 \, \%$.

FIGURE 36

Proportion de pions survivants sur l'hodoscope



Remarques -

- La pente = 1,25 % tient compte de la désintégration des pions en vol sur 29,3 mm, distance longitudinale des canaux (0,20 % à 180 MeV).
- l'efficacité au centre est sensiblement supérieure au rapport

$$\frac{\text{largeur des baguettes}}{\text{distance transversale}} = \frac{4,75 \text{ mm}}{6,7 \text{ mm}} = 0,71 ,$$

ce qui est dû à la dispersion angulaire du faisceau et au défaut d'orientation des baguettes.

5. La désintégration des pions en vol

Désignons par L la distance que parcourent les particules entre A' et un canal de l'hodoscope. Soit

$$\tau = (2,604 \pm 0,007) \cdot 10^{-8} \text{ seconde}$$

la vie moyenne des pions. Seule la fraction

$$P = e^{-\frac{L}{\beta c \cdot \gamma \tau}} \text{ subsiste et se trouve convenablement focalisée}$$

sur l'hodoscope. La fraction $1 - P$ correspond aux muons émis tout le long du faisceau, qui s'éliminent eux-mêmes parce qu'ils ne déclenchent pas le "trigger" ou font partie du bruit de fond qu'on élimine dans le dépouillement.

En fait une partie des muons, prenant naissance très près des canaux, ne peut pas être distinguée des pions. Il faut donc soustraire à la longueur L une longueur

$$\ell = \frac{\lambda}{2 \theta_M} ,$$

λ étant la largeur des pics à la base (~ 3 cm) et θ_M l'angle limite d'émission des μ (de 0,1 à 0,2 radian). La correction ℓ est de l'ordre de 10 cm, valeur faible devant les parcours (à partir de A')

$$L_0 = 766,3 \text{ cm}$$

$$L_{11} = 734,1 \text{ cm}$$

$$L_{22} = 701,9 \text{ cm.}$$

On calcule la proportion de survivants

$$P_K = P_{11} + (K - 11)\Delta P.$$

Les valeurs de P_{11} au centre et ΔP par canal sont données par les courbes de la figure 36 en fonction de l'énergie.

Evaluons l'erreur sur

$$P_K = e^{-\frac{L_K}{\beta c \cdot \gamma \tau}} = e^{-X_K} . \quad \text{On a}$$

$$\frac{\Delta P_K}{P_K} = - \Delta X_K \quad \text{et comme} \quad X_K \propto \frac{L_K}{p\tau} ,$$

$$\left(\frac{\Delta X_K}{X_K}\right)^2 = \left(\frac{\Delta L_K}{L_K}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \tau}{\tau}\right)^2$$

$$\sim (0,3 \%)^2 + (0,3 \%)^2 + (0,3)^2 \quad \text{soit}$$

$$\frac{\Delta X_K}{X_K} \sim 0,5 \%. \quad \text{A } 120 \text{ MeV}$$

$$X_K \sim 0,6 \quad \text{et on peut prendre}$$

$$\frac{\Delta P_K}{P_K} = 0,3 \% \quad \text{comme estimation supérieure.}$$

6. Absorption dans la cible

Cette correction s'exprime aisément à partir de la section efficace totale par la formule

$$a = \frac{Nm}{A \cos \alpha} \sigma_T(E) .$$

On voit que la connaissance en ordre de grandeur de σ_T est nécessaire pour évaluer correctement la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. La correction n'est nullement négligeable puisque σ_T atteint pratiquement 700 millibarns dans notre gamme de mesure. On trouve alors (avec $m \sim 1$)

$$a = \frac{6 \cdot 10^{23} \times 7 \cdot 10^{-25}}{12 \cos \alpha} = \frac{3,5 \%}{\cos \alpha} .$$

On peut écrire

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \sigma_T}{\sigma_T}\right)^2 = (2,1 \%)^2 + (1,01 \%)^2$$

et $\frac{\Delta a}{a} = 2,4 \%, \text{ soit pour la valeur extrême}$

$$a = 7 \% , \quad \frac{\Delta (1 - a)}{(1 - a)} = \frac{0,17}{0,93} \neq 0,2 \% .$$

C. Mesure des contaminations

La contamination du faisceau commence dès la cible interne du SC avec laquelle les protons interagissent sur plusieurs tours (profondeur ~ 1 mm). Les π^0 produits ont une vie tellement courte ($\sim 10^{-16}$ seconde) qu'ils se désintègrent en 2γ dans la cible elle-même. Par création de paires il en résulte une contamination en électrons dont une fraction possède une quantité de mouvement acceptable pour le faisceau de sortie et le double spectromètre (on a également dans 1 % des cas la création directe $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$).

A partir de π^0 possédant une énergie cinétique maximale ~ 300 MeV, il est difficile d'obtenir des électrons susceptibles de contaminer nos faisceaux de pions au-dessus de 200 MeV (c'est-à-dire ayant la même quantité de mouvement). De fait nous verrons que la proportion des électrons, pratiquement constante jusqu'à 150 MeV, chute brutalement à 180 MeV. Cette valeur correspond à une énergie ~ 300 MeV pour les électrons.

A ceci près que la loi de diffusion des électrons est différente de celle des pions sur la cible de notre spectromètre, les électrons qui possèdent une quantité de mouvement convenable au départ suivent le faisceau jusqu'à l'hodoscope. Nous avons mesuré leur abondance par la méthode du temps de vol, un des compteurs étant disposé au centre du spectromètre, l'autre au bout de l'analyseur, après l'hodoscope (distance $\sim 8,4$ mètres).

La contamination en muons présente un aspect particulier qui vient de ce que les pions les produisent en se désintégrant en vol tout au long du faisceau. La vie moyenne des pions est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-8}$ s. Celle des muons est 100 fois plus grande et ces particules de contamination peuvent être considérées comme stables dans notre expérience.

Fort heureusement les muons produits ne sont pas conduits correctement par les champs magnétiques du transport de faisceau car la plupart possèdent une quantité de mouvement très différente de celle des pions. Faisons les calculs à 200 MeV par exemple :

les particules sont émises à un angle maximum tel que

$$\sin \theta_M = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi m_\mu} \frac{1}{\sqrt{\gamma_\pi^2 - 1}} = 0,127, \text{ soit}$$

$\theta_M = 7,3^\circ$, avec une énergie telle que

$$\gamma_\mu = \frac{2 m_\pi m_\mu}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \gamma_\pi = 2,34, \text{ soit}$$

$$p_{\mu} = 225 \text{ MeV/c} \quad \text{à comparer avec}$$

$$p_{\pi} = 310 \text{ MeV/c} .$$

Les émissions au voisinage de θ_M dans le système du laboratoire correspondent à des angles θ^* très variables dans le système du centre de masse où l'émission est isotrope. Pour fixer les idées 50 % des μ sont émis entre $6,1^\circ$ et $7,3^\circ$ avec des impulsions comprises entre 190 MeV/c et 270 MeV/c. Seulement 8 % des μ ont des impulsions comprises entre 305 MeV/c et 315 MeV/c : ils sont émis entre 0° et $3,1^\circ$. Ces circonstances sont favorables puisque notre faisceau possède une bonne définition.

Les muons qui atteignent le moniteur sont :

- Des μ de bonne quantité de mouvement émis dans la cible du SC où immédiatement à sa sortie par des pions d'énergie quelconque.

- Des μ de bonne quantité de mouvement émis au voisinage du collimateur et sous un angle faible par les pions du faisceau. Cette contribution est négligeable étant données les conditions.

- Des μ émis après l'aimant du monochromateur et qui atteignent A', quelle que soit leur quantité de mouvement. On peut évaluer par excès cette contribution en raisonnant le long de la ligne moyenne du faisceau. A une distance d du compteur, on calcule θ puis θ^* et la proportion des μ acceptés :

$d(\text{cm})$	0	17,5	20	30	50	100
θ°	7,3	7,3	6,4	4,3	2,6	1,3
%	100	100	56	19	5	2 .

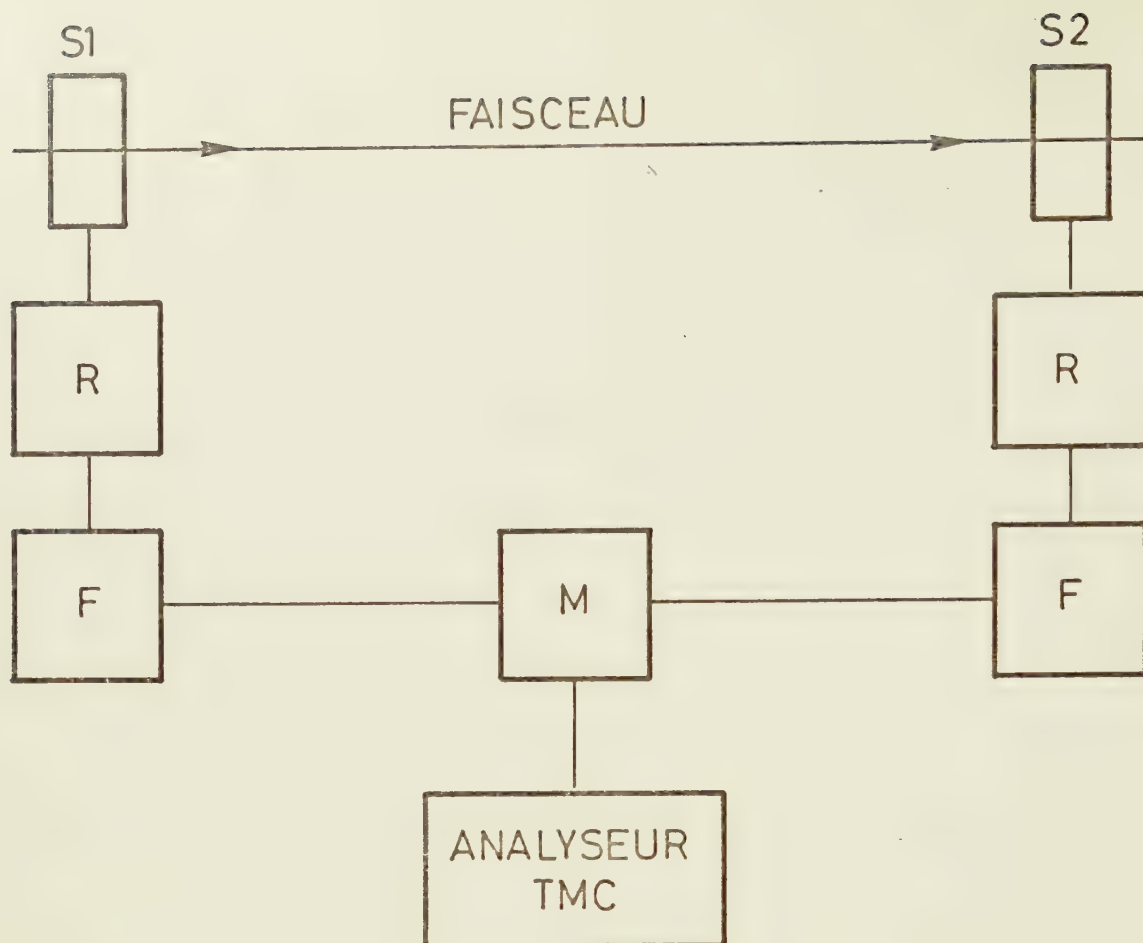
On trouve une distance efficace de 26 cm qui donne :

$$1 - \varepsilon \sim \frac{d}{\beta c \cdot \gamma \tau} \neq \frac{d}{\beta c \cdot \gamma \tau} = \frac{0,26}{17,28} = 1,5 \text{ \%}.$$

En fait la plupart des particules ne sont pas dans l'axe après dispersion à la sortie du monochromateur et la contribution réelle est certainement ~ 2 fois plus faible.

En tout état de cause il existe des μ qui sont comptés par le moniteur et ne peuvent pas passer dans l'analyseur, même s'ils sont diffusés dans une direction convenable par la cible. Dans le calcul de la section efficace il faudrait écrire :

$$n = \frac{100 - \varepsilon}{100} n_0 \times \text{cte} \left[\text{cte} \frac{100}{100 - \varepsilon} p_{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\pi} + \frac{100}{100 - \varepsilon} p_e \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_e + \frac{100}{100 - \varepsilon} (p_{\mu} - \varepsilon) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mu} \right] ,$$



SCHEMA DE PRINCIPE DES MESURES DE TEMPS DE VOL

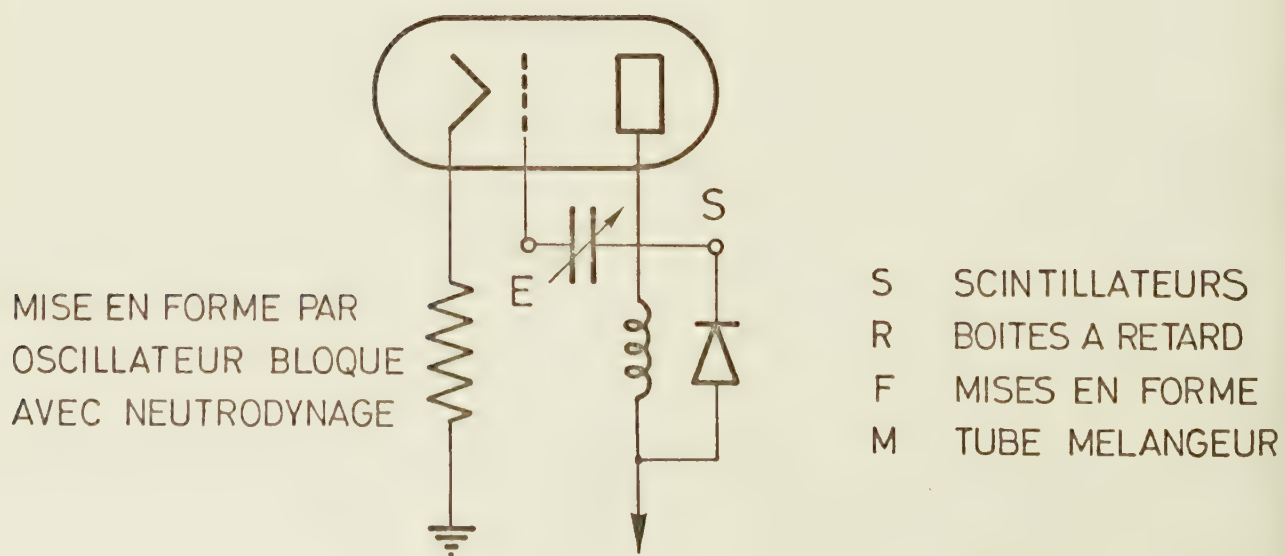


FIG. 37

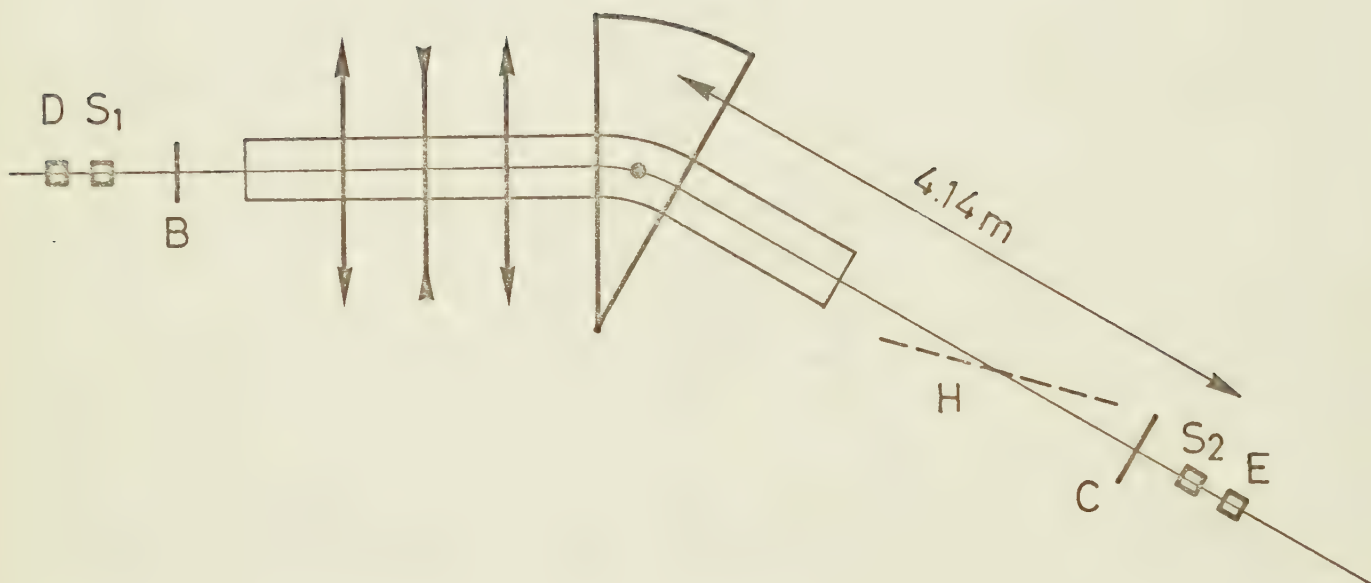


FIG. 38

ou ce qui revient au même :

$$n = n_0 \times cte \left[cte p_{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\pi} + p_e \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_e + (p_{\mu} - \epsilon) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\mu} \right].$$

On voit que l'erreur commise intervient dans un terme généralement négligeable.

Ajoutons que la contamination en μ a été déterminée tout de suite après le moniteur, au centre de la plateforme, par un dispositif de mesure de parcours. Les μ ayant des impulsions très inférieures à la valeur de réglage sont perdus dans le bruit de fond.

1. Les mesures de temps de vol

Nous donnerons seulement le principe du dispositif qui est classique (Figure 37).

Les signaux des deux détecteurs, convenablement retardés, sont mis en forme par des oscillateurs bloqués. Les signaux fournis par les photomultiplicateurs ont en effet des hauteurs variables. Comme par ailleurs les temps de réponse des photomultiplicateurs sont plus grands pour des signaux plus faibles, il est nécessaire de procéder à un neutrodynage pour réduire la dispersion dans le temps.

Après la mise en forme, les signaux sont des arches de sinusoïde et vont sur un tube mélangeur à deux grilles. Ce tube fournit, avec une certaine amplification, un signal proportionnel à la somme des deux signaux donc proportionnel, sur une large bande, au décalage de ces signaux. Il suffit ensuite d'utiliser un analyseur multicanal pour compter les particules du faisceau de vitesses différentes.

Le premier détecteur S_1 est exactement au centre de la plateforme. Le second S_2 se trouve au bout du bras de l'analyseur à 4,14 m du centre de l'aimant (Figure 38). On a ajouté à quelques cm de ces compteurs un scintillateur D en avant de S_1 et un scintillateur E en arrière de S_2 . Les quatre détecteurs ont 1 cm de largeur. Mis en coïncidence avec le moniteur AA' ils servent de déclencheurs et définissent une trajectoire moyenne très précise. La longueur de cette trajectoire vaut $S_1 S_2 = 8,44$ m.

Donnons quelques temps de vol pour fixer les idées (ns) :

	t_e	β_{π}	β_{μ}	t_{π}	t_{μ}	Δt_{π}	Δt_{μ}
120 MeV	28,15	0,8431	0,9005	33,39	31,26	5,24	3,11
280 MeV	28,15	0,9430	0,9661	29,85	29,14	1,70	0,99.

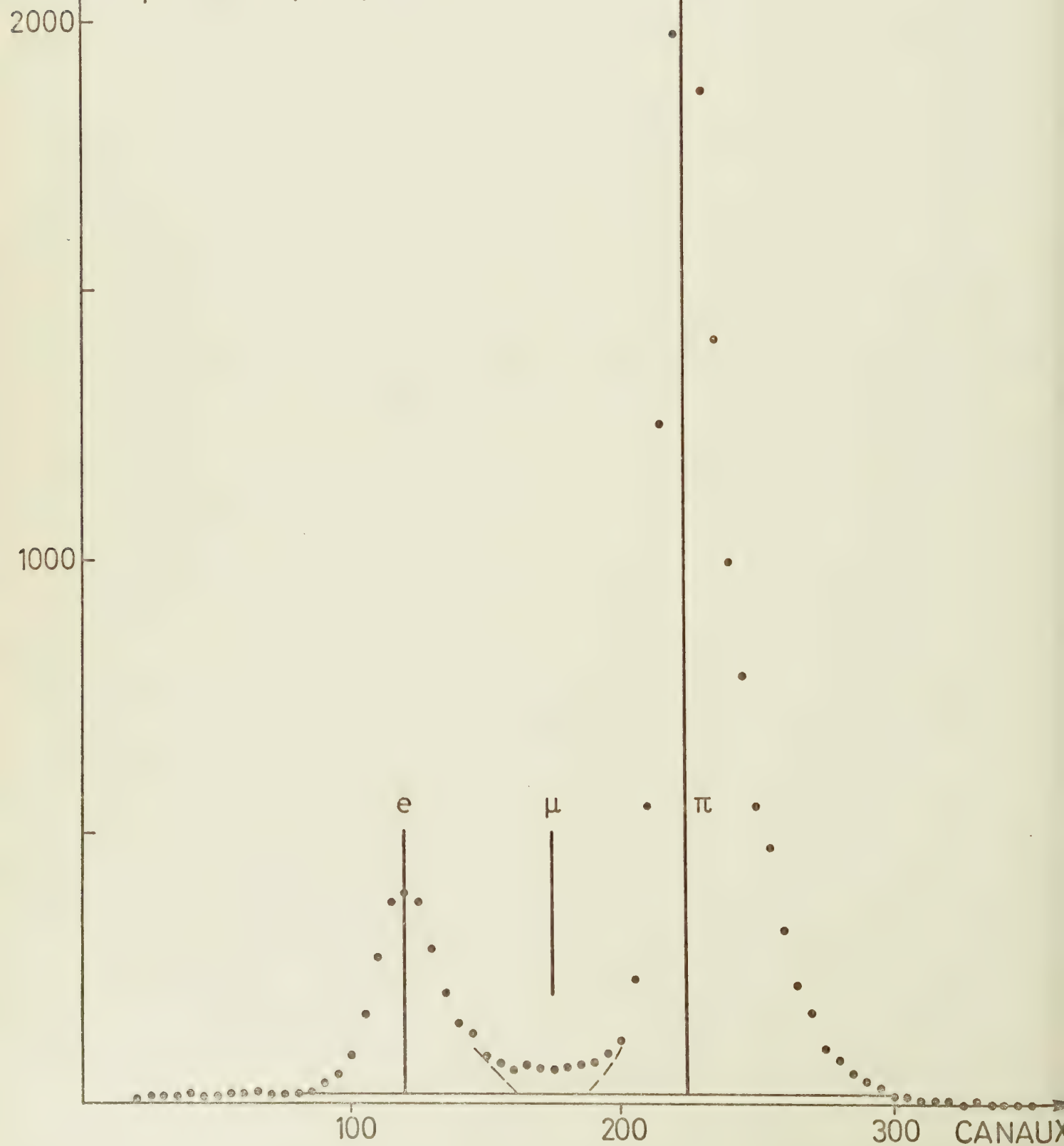
FIGURE 39

180 MeV Temps de vol (1ns ~ 30 canaux)

Composition:

 π 67.600x1.69=114.200

e 11.900 (9.3%)

 μ 2.000 (1.6%)

Dans nos conditions la largeur des pics à mi-hauteur est de l'ordre de 25 canaux de l'analyseur, ce qui correspond à 0,8 ns. On peut donc travailler à quelques 1/10ème de ns. De toute façon ce qui nous intéresse ici n'est pas la mesure des temps à proprement parler mais la séparation des particules.

La Figure 39 donne un exemple de mesure à 180 MeV. La décroissance des pions en vol exige un coefficient de correction de 1,69 pour les calculs.

On constate que l'évaluation de la contamination en μ est assez délicate : la méthode des parcours ne sera pas superflue.

En ce qui concerne les électrons la mesure peut être considérablement faussée si on ne tient pas compte du ralentissement des particules dans les divers matériaux rencontrés tout au long du parcours : compteurs D, S₁, B, H, C (enveloppés de 0,02 mm d'aluminium chacun), fenêtres de mylar du tube à vide, air. Les calculs ont été faits en admettant une équivalence à 13 mm de scintillateur, matériau prépondérant.

Prenons le cas le plus critique à 120 MeV. On peut calculer les pertes suivantes :

$$E_{\pi} = 260$$

$$p_{\pi} = 219$$

$$\Delta E_{\pi} = 3,20$$

$$\Delta p_{\pi} = 3,81 \quad \text{pour les pions,}$$

$$E_e = p_e = 219$$

$$\Delta E_e = \Delta p_e = 2,86$$

pour les électrons.

La différence

$\Delta p_{\pi} - \Delta p_e = 0,95 \text{ MeV/c}$ se traduit dans la zone des derniers compteurs par un décalage latéral

$$\frac{95 \times 1,58}{219} \frac{414}{275,5} \neq 1 \text{ cm.}$$

Les pics des pions et des électrons n'étant pas superposés, le faisceau est certainement optimisé de façon que les derniers compteurs soient entre les deux pics. Des fractions différentes de ces pics sont enregistrées et notre évaluation du rapport e/π est faussée.

Faisons une analyse simple en admettant que les pics aient une forme triangulaire (Voir Figure 40). On sait que la largeur des pics à mi-hauteur est 1,5 cm, étant donnée la résolution que nous obtenions sur l'hodoscope lors des réglages. Nous prendrons donc 3 cm à la base.

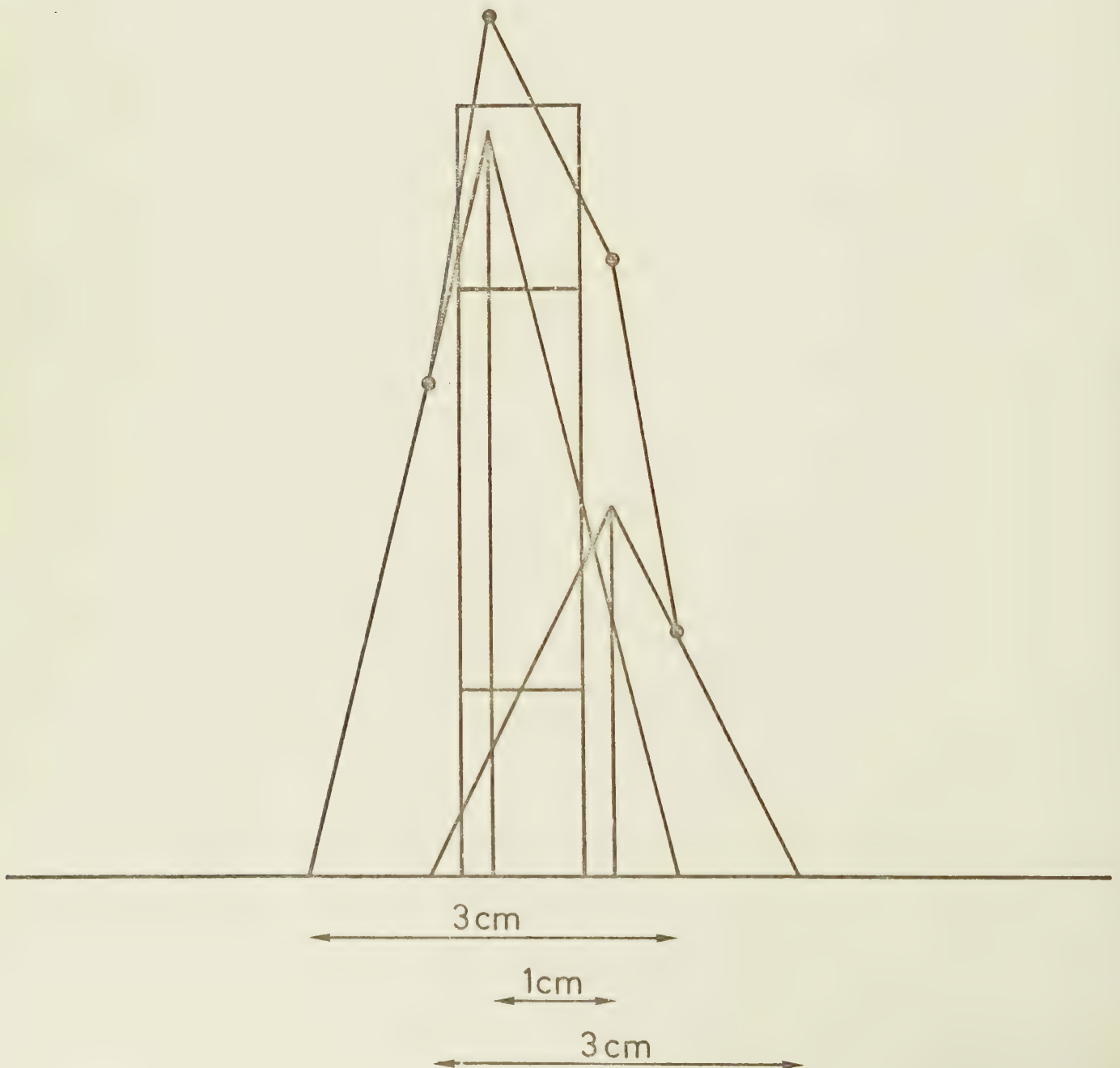
FIGURE 40

Contamination $\frac{e}{\pi}$ (effet d'absorption à 120 MeV)

$\frac{1}{4}$ (1^e compteur) $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ (2^e compteur) $\rightarrow$

$\frac{6}{19}$ (mesure) $\rightarrow$ $\frac{3}{19}$ (calcul) $\rightarrow$

Coefficient ~ 1.6



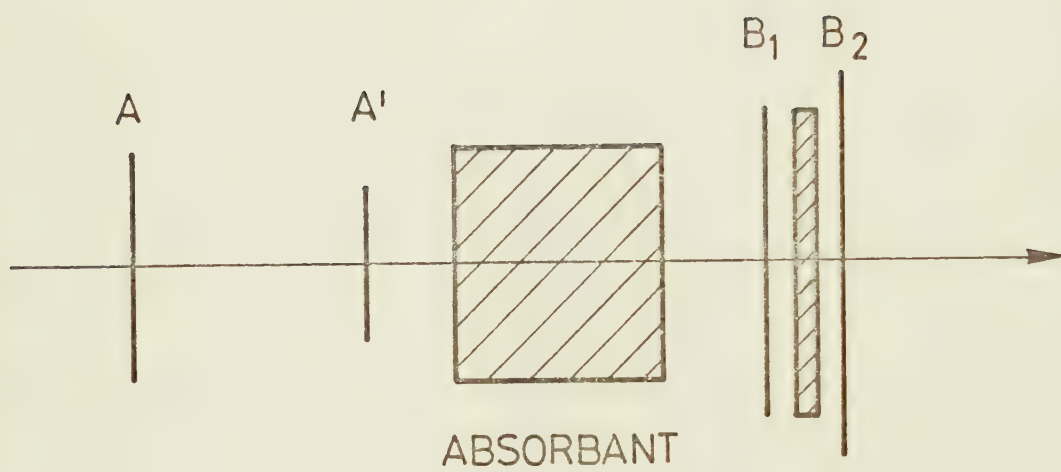


FIG. 41

On connaît le facteur de décroissance des pions

$$e^{-\frac{0,44}{12,22}} = 0,50 .$$

Disposons un détecteur de 1 cm de largeur de façon à ce qu'il prennent le plus grand nombre total de particules.

Soit $\frac{e}{\pi} = \frac{1}{4}$ la proportion initiale .

On a $\frac{e}{\pi} = \frac{1}{2}$ en bout de faisceau,

on compte $\frac{e}{\pi} = \frac{6}{19}$ et on en déduit $\frac{e}{\pi} = \frac{3}{19} /$.

Conclusion : on doit multiplier le résultat obtenu par $\frac{19}{12} \neq 1,6$.

Ces corrections ont été calculées avec soin et ont permis de corriger les mesures à faible énergie.

On obtient finalement :

		120	150	180	200	230 MeV
$\frac{e}{\pi + e + \mu}$ mesuré %		12,25	19,13	9,3	4,0	1,5
$\frac{e}{\pi + e + \mu}$ corrigé %		19,6±4	19,7±2	9,3	4,0	1,5.

2. Les mesures de parcours

Le dispositif comporte dans l'ordre :

Les détecteurs A et A' du moniteur, une certaine épaisseur d'absorbant, un détecteur B₁ en coïncidence puis un détecteur B₂ en anti-coïncidence (Figure 41).

B₁ est un scintillateur de 20 cm de diamètre et de 5 mm d'épaisseur. B₂ est un scintillateur de 30 cm de diamètre et de 5 mm d'épaisseur. Entre B₁ et B₂ on peut disposer une faible épaisseur d'absorbant ce qui permet de faire varier la largeur de la fenêtre d'analyse différentielle.

Pour un moniteur donné AA' on compte à la fois le nombre de particules qui franchissent l'absorbant (AA'B₁) et la fraction de ces particules qui n'atteignent pas B₂ (AA'B₁ $\overline{B_2}$).

Le problème principal est celui du choix du matériau à utiliser pour séparer au mieux les π des μ dans la gamme d'énergie envisagée. Il faut réduire les pertes latérales. L'épaisseur de matière ne doit pas être trop importante et la dispersion du faisceau par diffusion multiple

FIGURE 42

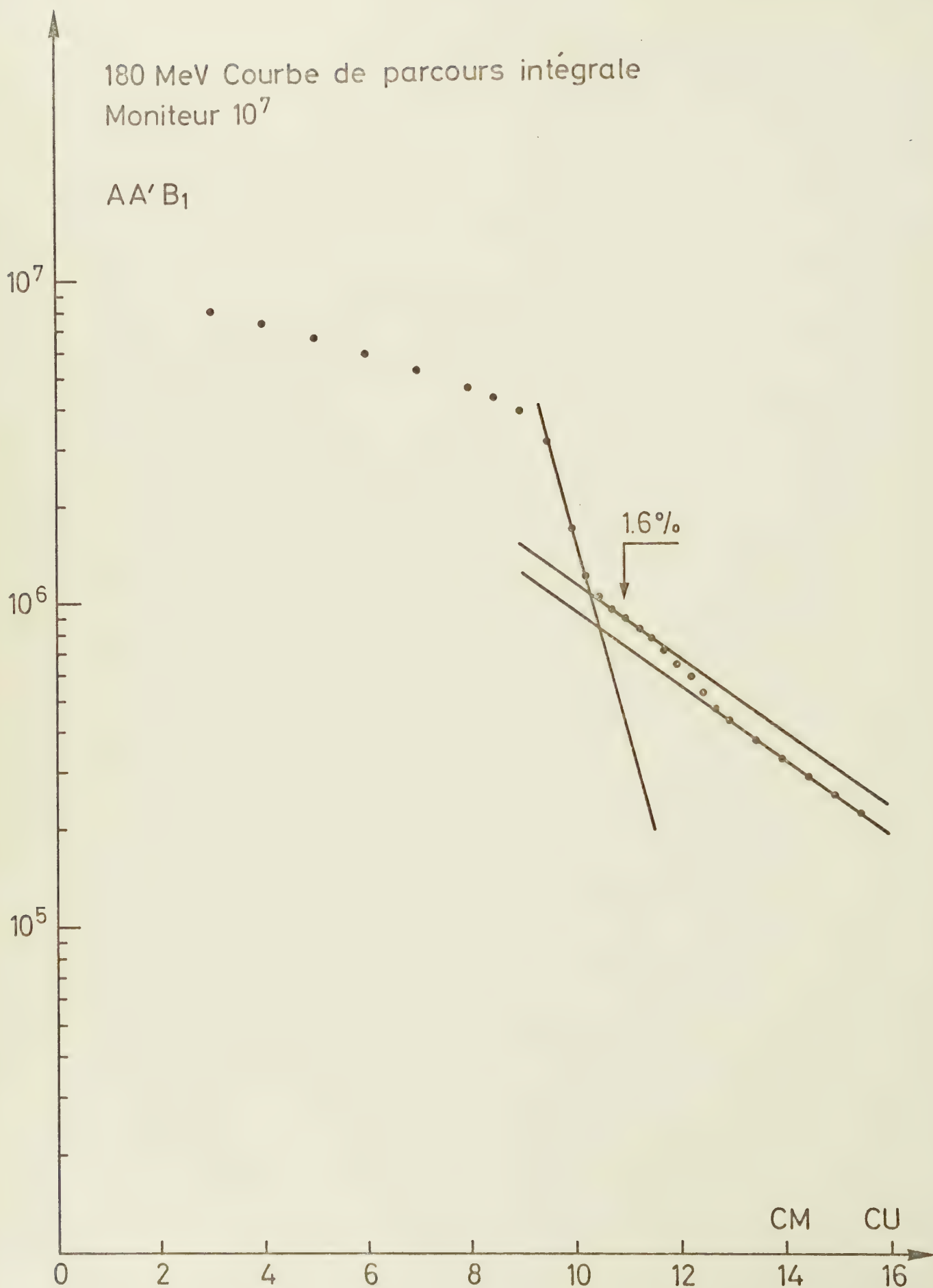
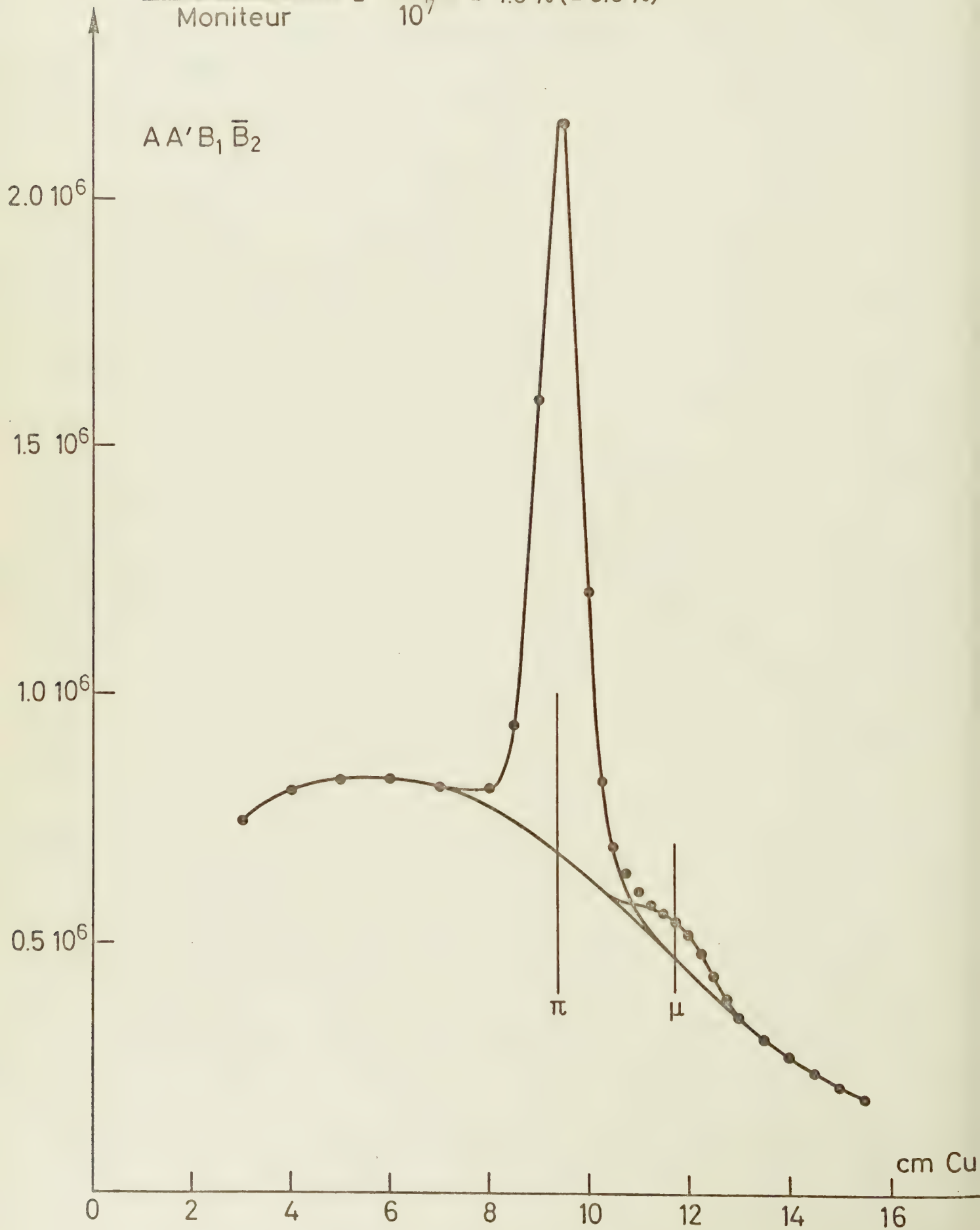


FIGURE 43

180 MeV Courbe de parcours différentielle (7mm de Cu)

$$\frac{\text{Contamination}}{\text{Moniteur}} = \frac{1.6 \cdot 10^5}{10^7} = 1.6\% (\pm 0.3\%)$$



doit être aussi faible que possible. Nous avons donc pris comme facteur de mérite le produit

$$L \times \sqrt{\frac{L}{L_R}} \quad \text{où } L \text{ est l'épaisseur}$$

et L_R la longueur de radiation.

Nous avons ainsi comparé le carbone, le cuivre et le plomb pour toutes les énergies des mesures. Donnons quelques résultats à 180 MeV par exemple :

$$E_\mu = 200,7 \text{ MeV}$$

	Parcours g/cm ²	L(cm)	L _R (cm)	$L\sqrt{\frac{L}{L_R}}$ (cm)
C	90,1	45,5	21,8	65,6
Cu	113,7	12,9	1,46	38,3
Pb	146,2	12,9	0,51	64,9

On obtient toujours un facteur de mérite deux fois meilleur pour le cuivre qui est donc le meilleur absorbant auquel nous avons pensé. Il reste à vérifier que la séparation des π et des μ s'effectuera correctement. On peut calculer pour le cuivre :

	Parcours π	Parcours μ	Δ parcours/ Σ fluctuations
g/cm ²	91,1 $\pm$ 2,24	113,7 $\pm$ 3,06	4,26,
cm	10,4 $\pm$ 0,25	12,9 $\pm$ 0,35	

ce qui est excellent. Voyons maintenant comment se présentent les résultats obtenus avec le cuivre à 180 MeV.

La courbe de parcours intégrale (Figure 42) en coordonnées semi-logarithmiques donne directement l'ordre de grandeur de la contamination. La courbe de parcours différentielle (Figure 43) a été obtenue en mettant 6 mm de cuivre entre B_1 et B_2 . Comme le premier scintillateur équivaut à 1 mm de cuivre il faut compter une longueur de bande de 7 mm au total.

Cette dernière courbe est la plus intéressante. Les pics se trouvent sur un bruit de fond qui possède un maximum pour quelques cm de matière, ce qui est dû aux interactions du faisceau. Les pics sont plus larges que ne le prévoyait le calcul mais la contamination reste facile à évaluer. Nous admettons la valeur

(1,6 $\pm$ 0,3) %, l'erreur étant estimée de façon à couvrir largement toute variation possible dans l'interprétation graphique.

La contamination reste du même ordre aux autres énergies et il faut remarquer qu'elle est un ordre de grandeur en dessous des valeurs couramment observées dans les faisceaux de pions. Ceci est dû aux bonnes propriétés optiques de notre faisceau qui permettent d'éliminer les μ produits avant l'analyse magnétique. On trouve :

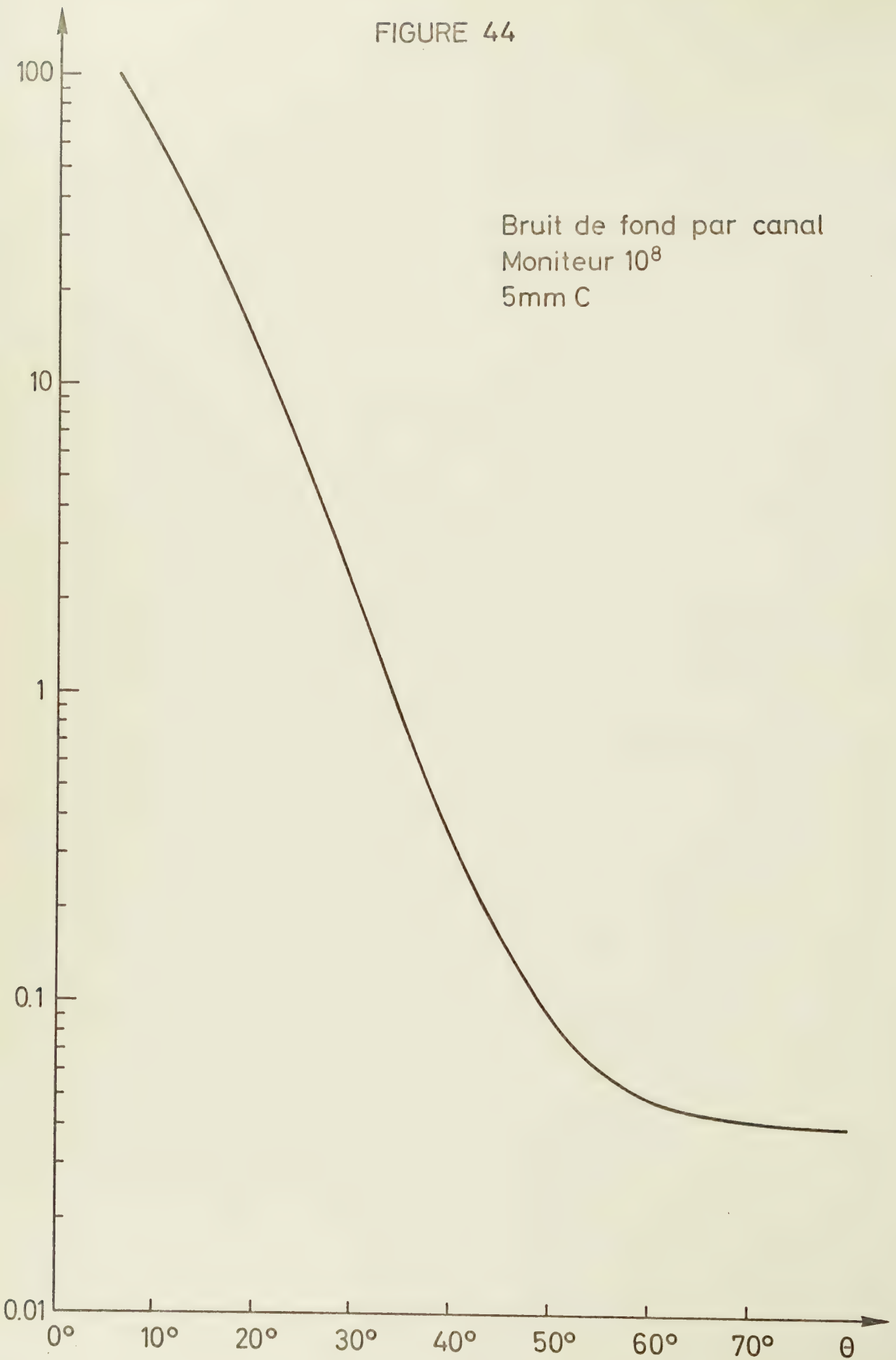
	120	150	180	280	MeV
$\frac{\mu}{\pi + e + \mu} \%$	1,8	1,7	1,6	1,5	($\pm 0,3$)

3. Tableau d'ensemble des résultats

MeV	p_e (%)	p_μ (%)	p_π (%)
120	19,6 $\pm$ 4,0	1,8 $\pm$ 0,3	78,6 $\pm$ 4,0
150	19,7 $\pm$ 2,0	1,7 $\pm$ 0,3	78,6 $\pm$ 2,0
180	9,3 $\pm$ 0,8	1,6 $\pm$ 0,3	89,1 $\pm$ 0,9
200	4,0 $\pm$ 0,4	1,6 $\pm$ 0,3*	94,4 $\pm$ 0,5
230	1,5 $\pm$ 0,3	1,5 $\pm$ 0,3*	97,0 $\pm$ 0,4
260	0,5 $\pm$ 0,3*	1,5 $\pm$ 0,3*	98,0 $\pm$ 0,4
280	0,3 $\pm$ 0,3*	1,5 $\pm$ 0,3	98,2 $\pm$ 0,4

* valeurs extrapolées ou interpolées.

FIGURE 44



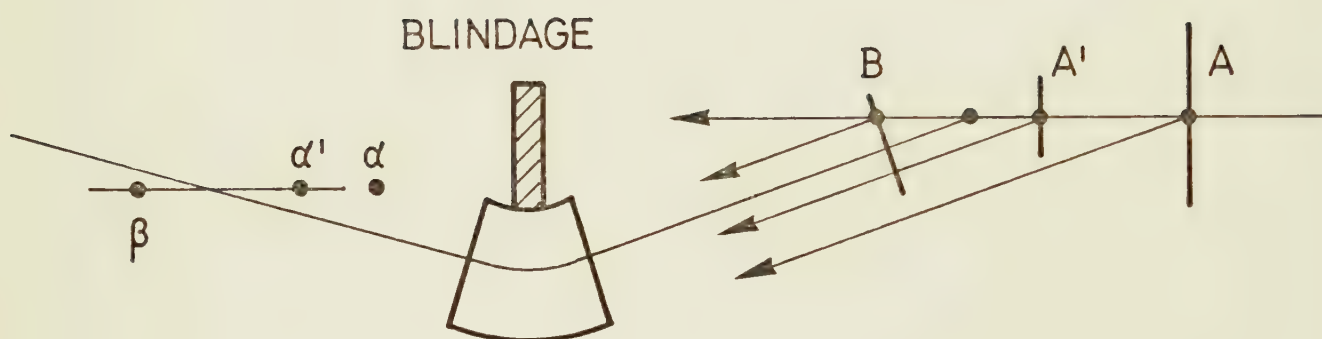


FIG. 45

C H A P I T R E IV BIS

RESULTATS DES MESURES DIFFERENTIELLES

A. Erreurs et corrections

Nous nous proposons dans ce paragraphe de décrire les différentes sources d'erreurs, leur évaluation et les corrections éventuelles qui en résultent.

1. Etude du bruit de fond

Le bruit de fond est une cause d'erreur importante à faible angle et a été l'objet d'une étude systématique.

Au début de l'expérience, le bruit de fond en dessous de 10° était dû au fait que le faisceau direct issu du monochromateur touchait le début du tube à vide de l'analyseur, suffisamment près de l'axe pour que de nombreuses particules diffusées dans ces conditions soient enregistrées. Nous avons réduit ce bruit en installant une nouvelle tête d'entrée de diamètre supérieur. Entre 20 et 30° le même faisceau direct balayait l'hodoscope, ce qui rendait les mesures impossibles. Il y fut remédié en disposant un blindage à côté de l'aimant, de façon à protéger l'hodoscope.

Le bruit de fond résiduel fut plus difficile à analyser. Il comprend :

- Un bruit de fond général, qu'on peut évaluer en observant les taux enregistrés sur les canaux extrêmes ou entre les pics. La Figure 44 donne ce bruit de fond en coups/canal pour un moniteur de 10^8 et pour une cible de carbone de 1 g/cm^2 , en fonction de l'angle de diffusion θ . Les valeurs lues sur la courbe sont des valeurs moyennes pouvant varier de 20 à 30 % suivant les réglages.

- Des pics parasites qui sont dus au fait que le faisceau sortant du monochromateur est partiellement diffusé par les scintillateurs A, A' et B (Figure 45).

Le compteur A n'est gênant qu'en dessous de 10° , mais alors d'autres problèmes (bruit dû au tube à vide, multiple scattering, structure du faisceau incident ...) rendent les mesures illusoires. Par contre



FIGURE 46

Position des pics parasites
par rapport au pic élastique

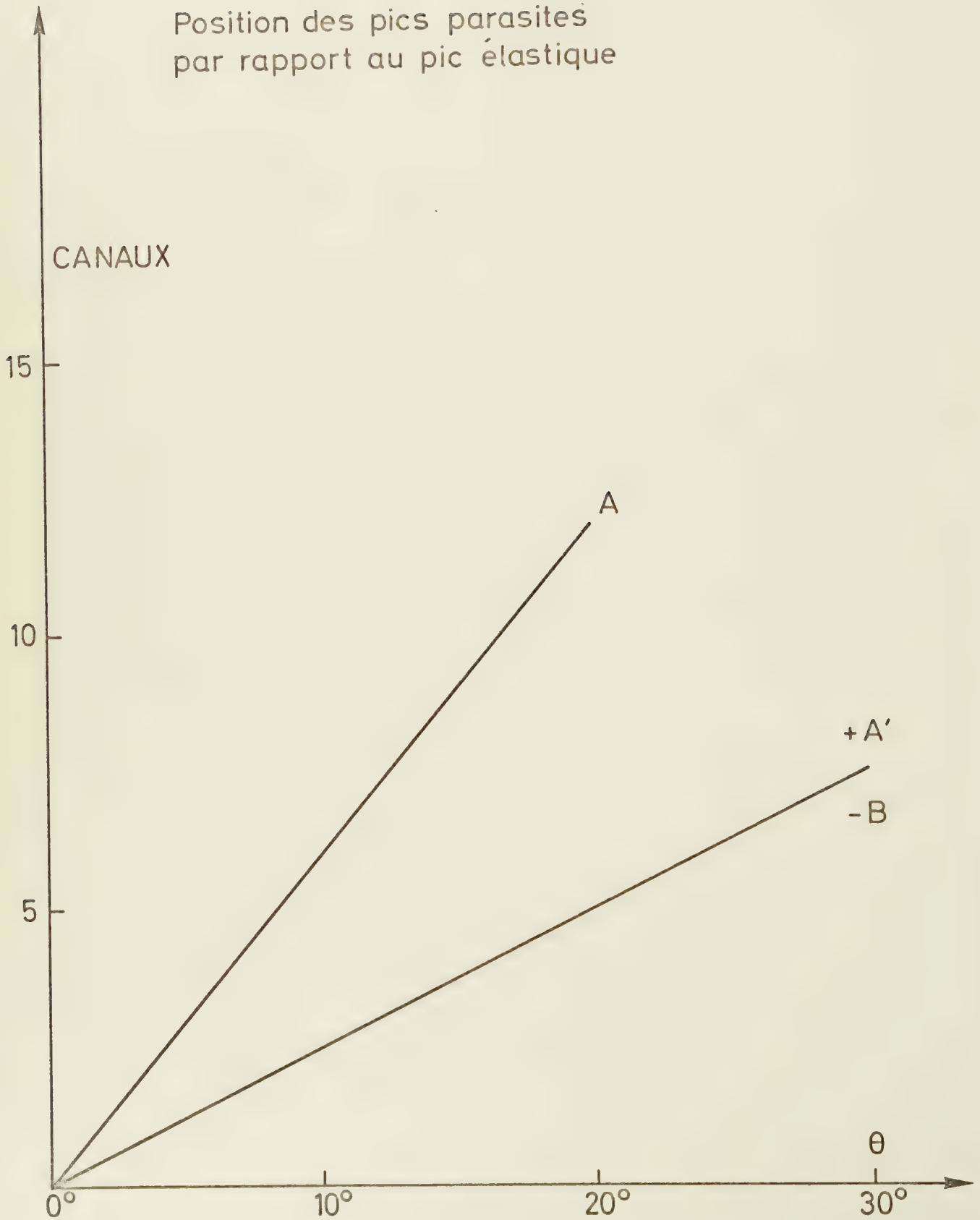


FIGURE 48

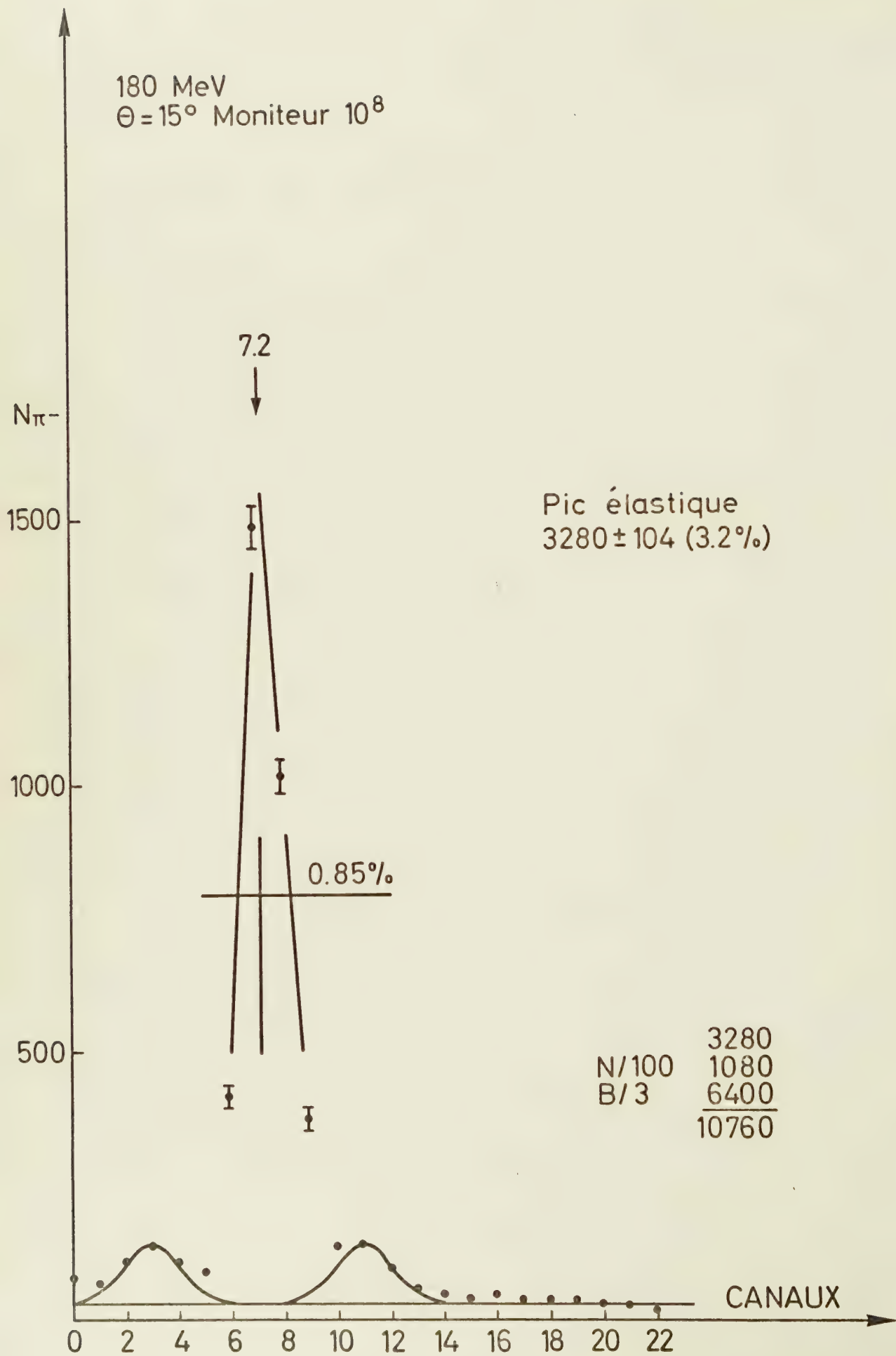
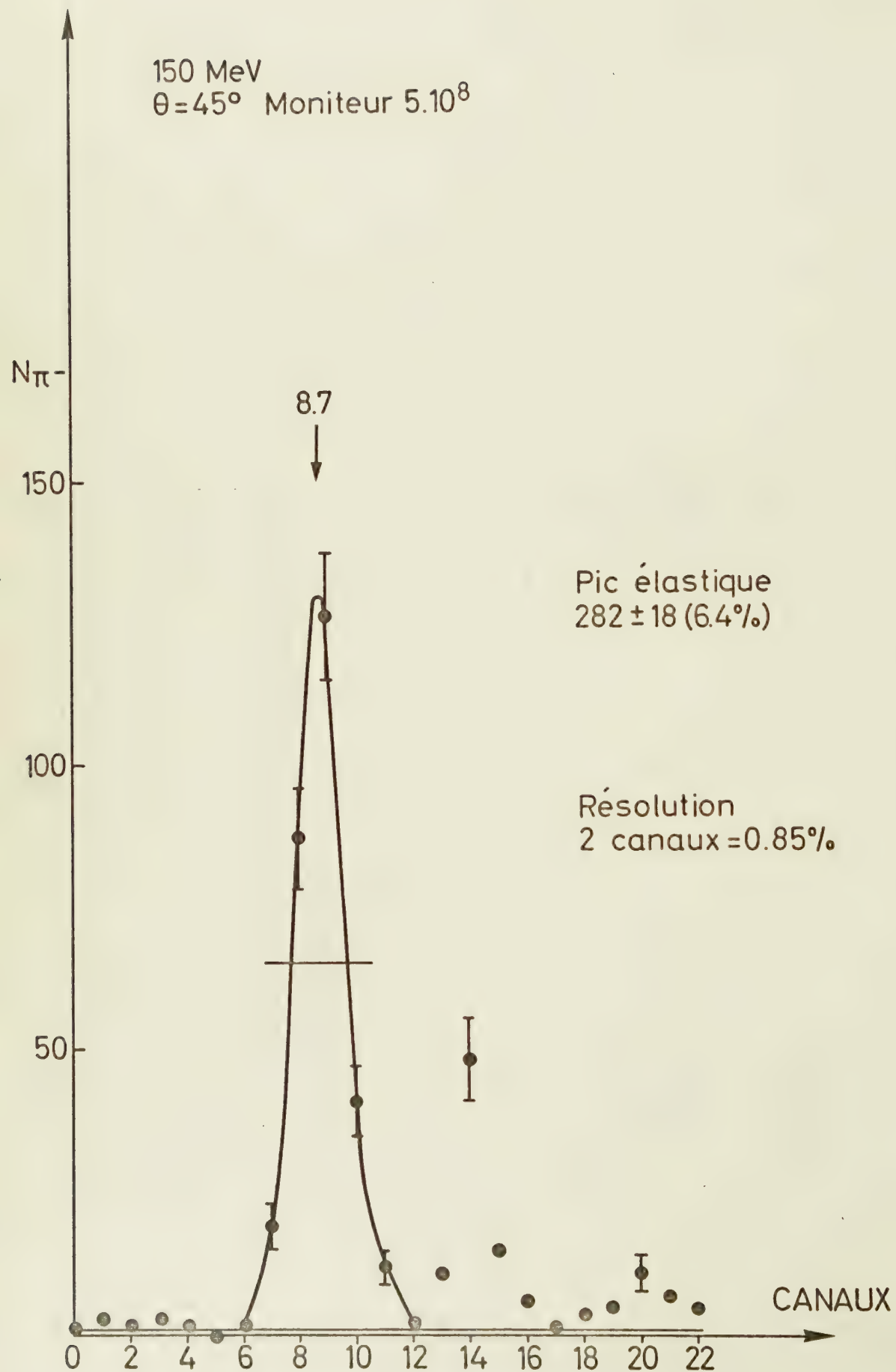


FIGURE 49



- Le taux de comptage peut varier légèrement suivant le fractionnement des canaux car l'hodoscope n'est pas à recouvrement total. Nous tenons compte de cet effet en admettant une erreur possible de 1 %.

- En ce qui concerne le bruit de fond nous avons adopté une règle simple justifiée par l'ordre de grandeur des fluctuations : nous comptons une erreur sur le bruit de fond égale à $1/3$ du bruit de fond.

La figure 49 donne un exemple de dépouillement où on trouve pour le pic élastique :

$$\left. \begin{array}{l} 289 - 7 = 282 \text{ coups, avec} \\ \sqrt{282} \sim 17 \\ 282/100 \sim 3 \\ 7/3 \sim 3 \end{array} \right\} \sqrt{17^2 + 3^2 + 3^2} \sim 18 \text{ coups.}$$

L'erreur sur le bruit de fond, prépondérante à faible angle, joue ici un rôle négligeable.

b) Nous avons déterminé les valeurs des paramètres qui interviennent dans le calcul et nous avons estimé les erreurs possibles sur ces valeurs. Ce sont des erreurs de calibration pour lesquelles nous pouvons faire un calcul global, valable pour l'ensemble des mesures.

La liste est la suivante :

	$\epsilon \%$	ϵ^2
$1 + C_A$	1,0	1,00
M	2,1	4,41
$\Delta\Omega$	1,8	3,24
ξ_B	0,1	0,01
ξ_C	0,2	0,04
ξ_K	0,7	0,49
P_K	0,3	0,09
$1 - a$	0,2	0,04
		$\Sigma \epsilon^2 = 9,32$

L'erreur globale est de l'ordre de 3 %.

Les erreurs sur la composition du faisceau doivent être ajoutées séparément pour chaque énergie :

120 MeV	4,0/0,786	=	5,1 %	+	3 %	→	~	6 %
150 MeV	2,0/0,786	=	2,55 %	+	3 %	→	~	4 %
180 MeV	0,9/0,891	=	1,0 %	+	3 %	→	~	3 %
200 MeV	0,5/0,944	=	0,5 %	+	3 %	→	~	3 %
230 MeV	0,4/0,970	=	0,4 %	+	3 %	→	~	3 %
260 MeV	0,4/0,980	=	0,4 %	+	3 %	→	~	3 %
280 MeV	0,4/0,982	=	0,4 %	+	3 %	→	~	3 %

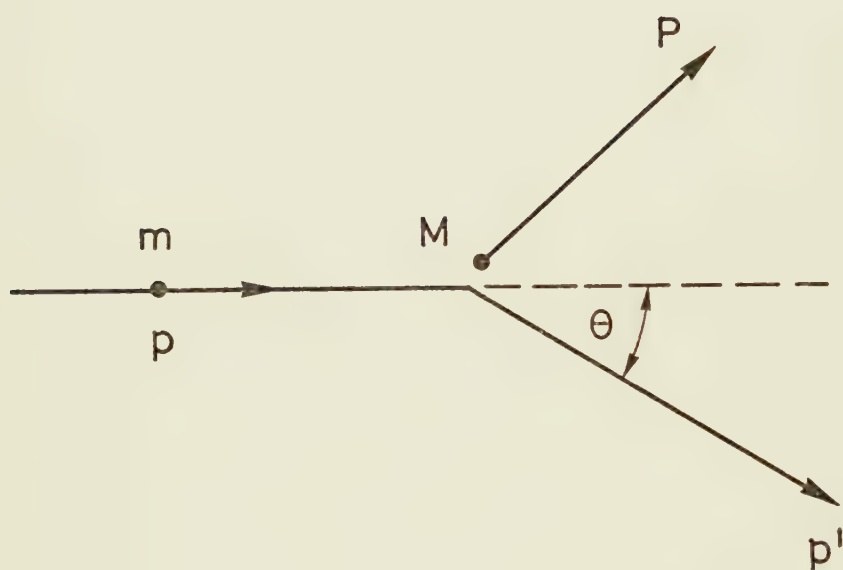


FIG. 50

$$\phi_{\text{exp}}(\theta_0 - \alpha) = \phi_{\text{exp}}(\theta_0) - \alpha \phi'_{\text{exp}} + \frac{\alpha^2}{2} \phi''_{\text{exp}}.$$

On peut enfin effectuer la correction :

$$\phi(\theta_0) = \phi_{\text{exp}}(\theta_0) - \frac{\langle \theta^2 \rangle}{\alpha^2} \left[\frac{\phi_{\text{exp}}(\theta_0 + \alpha) + \phi_{\text{exp}}(\theta_0 - \alpha)}{2} - \phi_{\text{exp}}(\theta_0) \right].$$

Pour effectuer la correction d'angle fini, il a fallu déterminer la valeur quadratique moyenne des écarts angulaires. Cette valeur a été obtenue en disposant une cible de carbone au centre du spectromètre et en mesurant la surface du pic sur l'hodoscope lorsqu'on fait varier l'angle entre 0 et 5°. A cette occasion, nous avons pu constater et évaluer un décalage du zéro de l'ordre de quelques 1/10°, suivant le réglage du faisceau. Il a été tenu compte de ce décalage dans nos tableaux de résultats. Par contre nous avons trouvé une valeur sensiblement constante $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = 1,6^\circ$ à toutes les énergies.

La correction d'angle fini qui en résulte peut être notable, surtout pour le premier minimum de diffraction et particulièrement à 180 MeV où le minimum en question est extrêmement étroit. Nous avons admis que cette correction, purement analytique, n'entraînait aucune erreur supplémentaire.

Nous n'avons pas effectué la correction d'énergie finie qui est seulement appréciable dans la région des minimums où elle reste toutefois nettement (dix fois) plus faible que la correction d'angle fini.

4. Correction de diffusion multiple

a) Cherchons tout d'abord dans quelles conditions plusieurs diffusions successives peuvent avoir lieu dans la cible. Une limite nous est imposée par le fait que le spectromètre discrimine les particules dont la quantité de mouvement varie de 1 % par rapport au réglage.

Calculons donc la variation en quantité de mouvement dans un choc élastique pion-noyau. Il vient avec les notations de la Figure 50.

$$\sqrt{m^2 + p^2} + M = \sqrt{m^2 + p'^2} + \sqrt{M^2 + P^2},$$

soit en posant $p' = p - \Delta p$,

$$\sqrt{m^2 + p^2} + M = \sqrt{m^2 + p^2} \left(1 - \frac{p \Delta p}{m^2 + p^2} \right) + M \left(1 + \frac{P^2}{2 M^2} \right).$$

En simplifiant, on trouve

$$\frac{p \Delta p}{\sqrt{m^2 + p^2}} = \frac{P^2}{2M} \neq \frac{p^2}{M} (1 - \cos \theta) \quad \text{ou enfin}$$

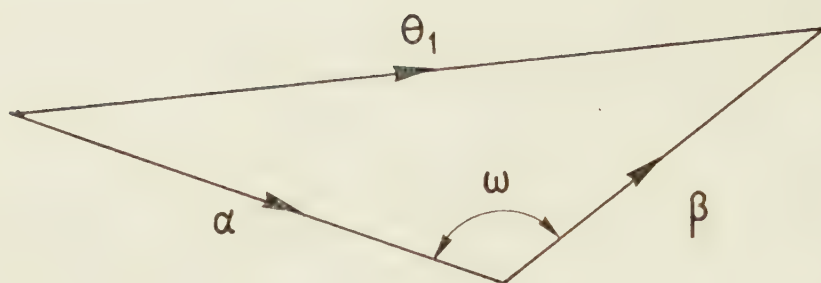


FIG. 51

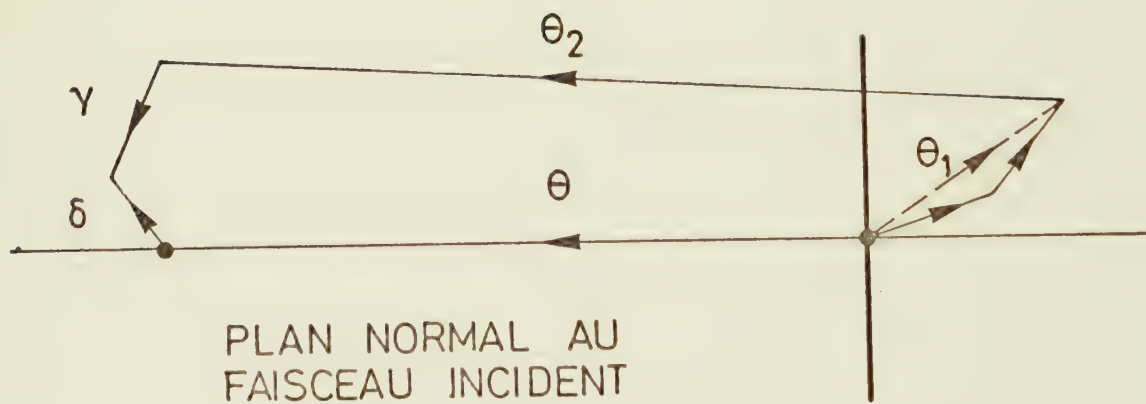


FIG. 52

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{M} (1 - \cos \theta) .$$

Par exemple à 200 MeV :

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{140 + 200}{12 \times 940} (1 - \cos \theta) = \frac{3}{100} (1 - \cos \theta) .$$

Comme on doit avoir $\frac{\Delta p}{p} < \frac{1}{100}$, on voit que les seules diffusions qui puissent pratiquement intervenir en plus de la diffusion principale sont des diffusions à faible angle.

Mais alors la probabilité de diffusion coulombienne est très supérieure à la probabilité de diffusion nucléaire. Pratiquement on observe une diffusion nucléaire simple avec un brouillage angulaire dû à la diffusion coulombienne multiple tout au long du parcours dans la cible.

b) Admettons que les particules fournies par le monochromateur possèdent une distribution angulaire autour d'une direction moyenne (pour une quantité de mouvement donnée) avec une densité par unité d'angle solide de la forme

$$\frac{1}{2 \pi \langle \alpha^2 \rangle} e^{-\frac{\alpha^2}{2 \langle \alpha^2 \rangle}} \quad \text{telle que}$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2 \pi \langle \alpha^2 \rangle} e^{-\frac{\alpha^2}{2 \langle \alpha^2 \rangle}} = 1 .$$

Les particules subissent d'abord de la diffusion coulombienne multiple qui ne modifie pas la direction moyenne mais augmente l'écart quadratique calculable en fonction de la distance parcourue dans la cible puisque (Figure 51)

$$\begin{aligned} \langle \theta_1^2 \rangle &= \langle \alpha^2 + \beta^2 - 2 \alpha \beta \cos \omega \rangle \\ &= \langle \alpha^2 \rangle + \langle \beta^2 \rangle . \end{aligned}$$

Nous supposons qu'on observe ensuite une diffusion nucléaire d'angle θ_2 puis de la diffusion coulombienne multiple d'angle γ . Enfin les particules sont comptées si l'angle δ avec la direction moyenne définie par l'analyseur n'est pas trop grand (Figure 52). Nous admettons une loi de probabilité de la forme

$$e^{-\frac{\delta^2}{2 \langle \delta^2 \rangle}} , \quad \text{ce qui correspond à un angle solide}$$

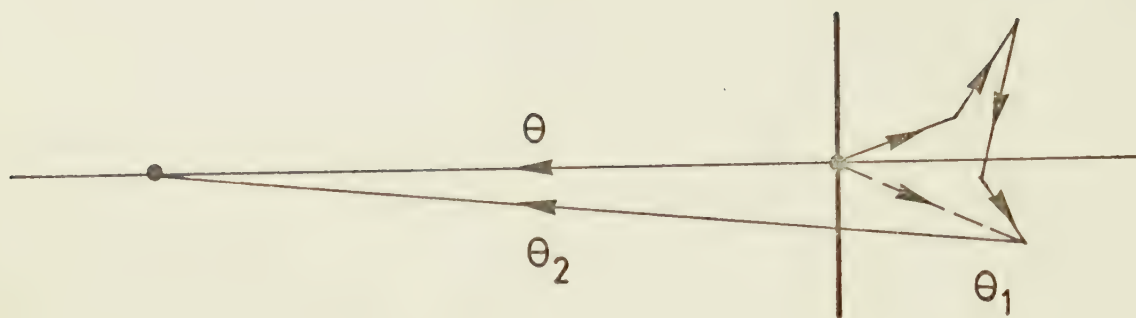


FIG. 53

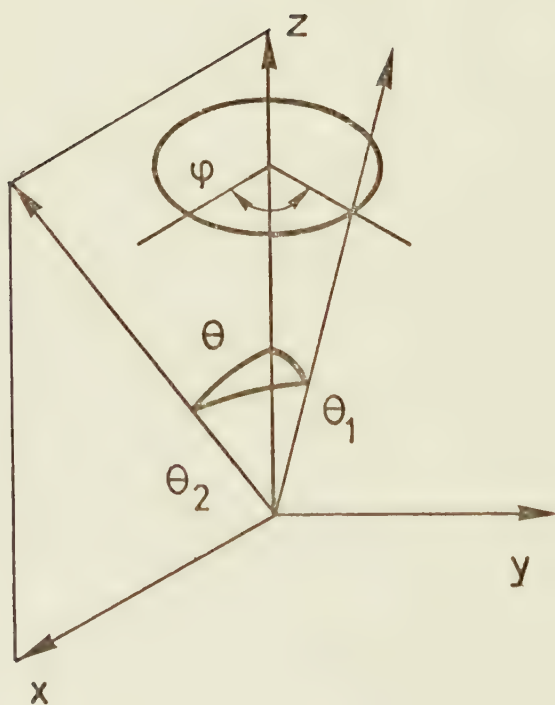


FIG. 54

$$\Delta\Omega = \int_0^\infty e^{-\frac{\delta^2}{2\langle\delta^2\rangle}} 2\pi\delta d\delta = 2\pi\langle\delta^2\rangle.$$

Pour le calcul, il revient au même de supposer l'existence d'un autre processus de diffusion et de calculer la probabilité qu'on a pour obtenir une déviation δ qui amène les particules dans l'analyseur, soit

$$\frac{1}{2\pi\langle\delta^2\rangle} e^{-\frac{\delta^2}{2\langle\delta^2\rangle}} \cdot \Delta\Omega.$$

En adoptant ce point de vue, tout compte fait peu importe l'ordre dans lequel sont réalisées les rotations dans l'espace et la convolution résultante est équivalente à celle qu'on peut calculer en admettant une diffusion à faible angle θ_1 conforme à la loi

$$\frac{1}{2\pi\langle\theta_1^2\rangle} e^{-\frac{\theta_1^2}{2\langle\theta_1^2\rangle}}, \text{ avec (Figure 53)}$$

$$\langle\theta_1^2\rangle = \langle\alpha^2\rangle + \langle\beta^2\rangle + \langle\gamma^2\rangle + \langle\delta^2\rangle,$$

suivie d'une diffusion d'angle θ_2 tel que

$$R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta).$$

c) Prenons les notations de la Figure 54 où l'axe Oz représente la direction moyenne du faisceau incident et le plan xOz, le plan balayé par l'analyseur. On trouve

$$\cos \theta_2 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \phi.$$

L'erreur qu'il faut corriger provient de ce qu'on calcule la section efficace par la formule

$$n = n_0 \cdot \text{cte.} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta^{\text{exp}} \text{ alors qu'on mesure}$$

$$n = n_0 \cdot \text{cte.} \frac{1}{2\pi\langle\theta_1^2\rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{\theta_1^2}{2\langle\theta_1^2\rangle}} \theta_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta_2} d\phi$$

Il s'agit de faire le calcul correct en écrivant

$$\theta_2 = \theta + a\theta_1 + b\theta_1^2 \dots \text{ et}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta_2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta + A\theta_1 + B\theta_1^2 \dots$$

$$\text{On trouve alors } \theta_2 = \theta - \cos\phi\theta_1 + \frac{\sin^2\phi}{\text{tg } \theta} \frac{\theta_1^2}{2} \dots \text{ et}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta_2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta} - \cos\phi \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\theta}\right)_{\theta} \cdot \theta_1$$

$$+ \left[\frac{\sin^2 \phi}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\theta}\right)_{\theta} + \cos^2 \phi \left(\frac{d^3\sigma}{d\Omega d\theta^2}\right)_{\theta} \right] \cdot \frac{\theta_1^2}{2} \dots$$

puis en intégrant

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta_2} d\phi = 2\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta} + \pi \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\theta}\right)_{\theta} + \left(\frac{d^3\sigma}{d\Omega d\theta^2}\right)_{\theta} \right] \cdot \frac{\theta_1^2}{2} \dots$$

et enfin

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta}^{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta} + \pi \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\theta}\right)_{\theta} + \left(\frac{d^3\sigma}{d\Omega d\theta^2}\right)_{\theta} \right] \cdot \frac{\langle \theta_1^2 \rangle}{2} \dots$$

ou encore

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta}^{\text{exp}} - \pi \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\theta}\right)_{\theta}^{\text{exp}} + \left(\frac{d^3\sigma}{d\Omega d\theta^2}\right)_{\theta}^{\text{exp}} \right] \cdot \frac{\langle \theta_1^2 \rangle}{2} \dots$$

Il ne reste plus qu'à évaluer les dérivées supérieures à partir des valeurs expérimentales

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta \pm \alpha}^{\text{exp}} \quad \text{lues sur les courbes.}$$

Finalement :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta}^{\text{exp}} - \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta+\alpha}^{\text{exp}} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta-\alpha}^{\text{exp}}}{2\alpha} \right] \cdot \frac{\langle \theta_1^2 \rangle}{2}$$

$$- \left[\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta+\alpha}^{\text{exp}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta-\alpha}^{\text{exp}}}{2} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta}^{\text{exp}} \right] \cdot \frac{\langle \theta_1^2 \rangle}{\alpha^2} \dots$$

Comme le terme en $\frac{\langle \theta_1^2 \rangle}{\alpha}$ est négligeable pour θ quelconque, et en se limitant au second ordre, on retrouve la formule de correction d'angle fini :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta}^{\text{exp}} - \left[\quad \right] \frac{\langle \theta_1^2 \rangle}{\alpha^2},$$

où la valeur $\langle \theta^2 \rangle$ est la somme d'un terme dû aux propriétés intrinsèques du spectromètre (émittance du monochromateur, acceptance de l'analyseur) et d'un terme dû à la diffusion coulombienne multiple dans la cible.

Si $\langle \theta^2 \rangle$ est bien mesuré avec un diffuseur, et c'est le cas, la correction de diffusion multiple est incluse dans la correction d'angle fini.

B. Diffusion élastique

Les tableaux et courbes de ce paragraphe donnent les sections efficaces élastiques

entre 10 et 140° pour les énergies $\leq$ 200 MeV,

entre 10 et 70° pour les énergies $>$ 200 MeV.

- Les grandeurs qui figurent dans les Tableaux I sont calculées dans le système du centre de masse :

θ^* angle de diffusion

$(\frac{d\sigma}{d\Omega})^*$ sections efficaces obtenues à partir des mesures, compte tenu des désintégrations en vol, contaminations...

$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_A^*$ sections efficaces obtenues après correction d'angle fini (diffusion multiple comprise).

Cette correction n'est guère sensible que dans les creux de diffraction, et surtout à 180 MeV pour $\theta = 50^\circ$ (remarquer l'évolution des courbes de distribution autour de cette énergie). Nous admettons que le calcul peut être fait exactement et n'entraîne aucune erreur supplémentaire.

Les erreurs indiquées au bas des premières colonnes correspondent aux erreurs de calibration. Les valeurs importantes à faible énergie sont essentiellement le fait de la contamination. Leur évaluation ne tient pas compte des variations possibles de fonctionnement, non contrôlées d'une série de mesures à l'autre, soit de notre transport de faisceau, soit de la machine elle-même.

Nous avons cherché à tester ces variations en portant les valeurs des sections efficaces en fonction de l'énergie, pour des valeurs constantes du moment de transfert $t < 20\,000 \text{ (MeV/c)}^2$. Nous avons constaté quelques déplacements systématiques plus importants que les erreurs admises. En particulier les points à 150 MeV sont trop forts tandis que les points à 230 et 280 MeV sont trop faibles.

Nous verrons plus loin que les mesures des sections efficaces totales ont été faites en éliminant complètement les problèmes de contamination et dans d'excellentes conditions statistiques. L'idée nous est donc venue d'un lissage analytique s'appuyant sur ces dernières valeurs. Comme nous voulions faire une analyse en potentiel optique de l'ensemble de nos résultats, il était judicieux d'introduire dans notre programme d'optimisation un facteur d'échelle libre, permettant par multiplication de déplacer à chaque énergie l'ensemble des valeurs des sections

efficaces différentielles par rapport à la valeur de la section efficace totale déterminée indépendamment.

Les valeurs obtenues pour ce facteur d'échelle sont également indiquées dans les tableaux. Elles ramènent les déviations observées dans les barres d'erreurs et sont toutes voisines de 1, ce qui constitue un bon test de cohérence interne. Il faut cependant noter la valeur $1,16 \pm 0,06$ à 280 MeV qui nous semble très surprenante (Nous n'avons rien observé d'anormal au cours des mesures).

En dernière colonne on donne

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$ sections efficaces obtenues après multiplication par le facteur d'échelle,

ainsi que l'indétermination globale résultante.

- Les courbes II qui suivent représentent

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$ en fonction de θ^* .

Les courbes à 69,5 et 87,5 MeV correspondent aux résultats d'Edelstein et al⁽⁴⁸⁾ sans modification sauf conversion au système du centre de masse.

Les points marqués OP correspondent aux valeurs $[Im f(0)]^2$ déduites des valeurs de σ_T par application du théorème optique.

Les courbes III donnent l'ensemble de nos résultats en fonction du moment de transfert longitudinal

$p^*(1 - \cos \theta^*)$, variable le plus souvent utilisée pour les processus fortement inélastiques à plusieurs corps.

Le recouvrement des différentes distributions dans ce diagramme est tout à fait remarquable. En particulier le premier minimum de diffraction reste toujours situé au voisinage de 100 MeV/c, quelle que soit l'énergie. Cette coïncidence n'est évidemment pas observable dans le diagramme classique, en fonction du moment de transfert

$$t = 2 p^{*2} (1 - \cos \theta^*).$$

RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire 120 MeV					
Impulsion dans le système du centre de masse 213.92 MeV/c					
θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A^*$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$
10.84	398.1 ± 19.8	0	398.1 ± 19.8	1.04 ± 0.04	414.0 ± 20.6
11.87	348.6 ± 22.3	0	348.6 ± 22.3		362.5 ± 23.2
12.89	326.6 ± 19.0	0	326.6 ± 19.0		339.7 ± 19.8
13.91	314.3 ± 17.0	0	314.3 ± 17.0		326.9 ± 17.7
14.94	292.2 ± 12.2	0	292.2 ± 12.2		303.9 ± 12.7
15.97	258.5 ± 10.7	0	258.5 ± 10.7		268.8 ± 11.1
18.53	237.9 ± 8.6	0	237.9 ± 8.6		247.4 ± 8.9
21.07	200.8 ± 6.9	+0.2	201.0 ± 6.9		209.0 ± 7.2
25.16	138.5 ± 3.5	-0.2	138.3 ± 3.5		143.8 ± 3.6
31.27	89.6 ± 2.5	-0.4	89.2 ± 2.5		92.7 ± 2.6
36.33	60.0 ± 2.1	-0.5	59.5 ± 2.1		61.3 ± 2.2
41.56	29.0 ± 1.9	-0.4	28.6 ± 1.9		29.7 ± 2.0
46.64	12.4 ± 1.2	-0.3	12.1 ± 1.2		12.6 ± 1.2
51.72	6.07 ± 0.6	-0.2	5.87 ± 0.6		6.1 ± 0.6
56.79	3.26 ± 0.4	-0.1	3.16 ± 0.4		3.3 ± 0.4
61.85	1.97 ± 0.35	-0.04	1.93 ± 0.35		2.01 ± 0.36
66.90	1.50 ± 0.30	-0.01	1.49 ± 0.30		1.55 ± 0.31
71.94	1.75 ± 0.30	0	1.75 ± 0.30		1.8 ± 0.3
76.97	1.55 ± 0.30	0	1.55 ± 0.30		1.6 ± 0.3
87.01	0.75 ± 0.20	0	0.75 ± 0.20		0.78 ± 0.2
97.00	0.31 ± 0.14	0	0.31 ± 0.14		0.32 ± 0.15
111.93	0.083 ± 0.059	-0.002	0.081 ± 0.059		0.084 ± 0.061
131.69	0.60 ± 0.15	0	0.60 ± 0.15		0.62 ± 0.16
141.53	0.66 ± 0.15	0	0.66 ± 0.15		0.69 ± 0.16
	±6%		±6%		±7%
Erreur globale					

RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire

150 MeV

Impulsion dans le système du centre de masse

247.38 MeV/c

θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A^*$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$
10.16	475.9 ± 28.6	0	475.9 ± 28.6	0.94 ± 0.05	447.3 ± 26.9
11.18	430.8 ± 19.7	0	430.8 ± 19.7		405.0 ± 18.5
12.71	409.5 ± 16.2	0	409.5 ± 16.2		384.9 ± 15.2
15.27	365.5 ± 13.5	-1.5	364.0 ± 13.5		342.1 ± 12.7
20.40	264.4 ± 6.2	-1.5	262.9 ± 6.2		247.2 ± 5.8
25.62	169.9 ± 3.1	-1.2	168.7 ± 3.1		158.6 ± 2.9
30.73	98.1 ± 2.1	-1.0	97.1 ± 2.1		91.3 ± 2.0
35.84	50.3 ± 1.0	-0.7	49.6 ± 1.0		46.6 ± 0.9
40.94	22.9 ± 0.7	-0.5	22.4 ± 0.7		21.0 ± 0.7
46.04	8.3 ± 0.3	-0.4	7.9 ± 0.3		7.4 ± 0.3
51.12	2.56 ± 0.14	-0.18	2.38 ± 0.14		2.24 ± 0.13
56.20	1.18 ± 0.10	-0.07	1.11 ± 0.10		1.04 ± 0.09
58.73	0.70 ± 0.17	-0.07	0.63 ± 0.17		0.59 ± 0.16
61.27	1.02 ± 0.09	-0.03	0.99 ± 0.09		0.93 ± 0.08
66.32	1.48 ± 0.10	+0.01	1.49 ± 0.10		1.40 ± 0.09
71.37	1.27 ± 0.10	+0.01	1.28 ± 0.10		1.20 ± 0.09
76.41	1.22 ± 0.08	0	1.22 ± 0.08		1.15 ± 0.08
81.44	0.73 ± 0.06	0	0.73 ± 0.06		0.69 ± 0.06
86.45	0.40 ± 0.05	-0.01	0.39 ± 0.05		0.37 ± 0.05
91.46	0.15 ± 0.04	-0.01	0.14 ± 0.04		0.13 ± 0.04
96.45	0.11 ± 0.03	0	0.11 ± 0.03		0.10 ± 0.03
101.43	0.13 ± 0.03	0	0.13 ± 0.03		0.12 ± 0.03
111.36	0.32 ± 0.04	0	0.32 ± 0.04		0.30 ± 0.04
121.25	0.43 ± 0.06	0	0.43 ± 0.06		0.40 ± 0.06
140.93	0.23 ± 0.05	0	0.23 ± 0.05		0.22 ± 0.05
	±4%		±4%		±6%
Erreur globale					

RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire
180 MeV

Impulsion dans le système du centre de masse
279.57 MeV/c

θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_A$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_F$
10.18	462.2 ± 29.4	0	462.2 ± 29.4	1.00 ± 0.02	462.2 ± 29.4
11.21	454.7 ± 19.0	0	454.7 ± 19.0		454.7 ± 19.0
12.75	397.1 ± 15.0	0	397.1 ± 15.0		397.1 ± 15.0
15.32	362.0 ± 11.1	0	362.0 ± 11.1		362.0 ± 11.1
17.89	313.7 ± 7.0	0	313.7 ± 7.0		313.7 ± 7.0
20.46	242.1 ± 3.7	-0.5	241.6 ± 3.7		241.6 ± 3.7
25.57	147.8 ± 2.9	-1.0	146.8 ± 2.9		146.8 ± 2.9
30.71	75.3 ± 1.6	-1.2	74.1 ± 1.6		74.1 ± 1.6
35.81	30.8 ± 0.7	-1.0	29.8 ± 0.7		29.8 ± 0.7
40.73	8.73 ± 0.5	-0.6	8.13 ± 0.5		8.1 ± 0.5
45.83	1.48 ± 0.19	-0.3	1.18 ± 0.19		1.2 ± 0.2
48.38	0.46 ± 0.12	-0.16	0.30 ± 0.12		0.30 ± 0.12
50.93	0.113 ± 0.038	-0.100	0.013 $^{+0.005}_{-0.013}$		0.01 $^{+0.005}_{-0.01}$
53.47	0.40 ± 0.09	-0.05	0.35 ± 0.09		0.35 ± 0.09
56.01	0.52 ± 0.10	-0.01	0.51 ± 0.10		0.51 ± 0.10
61.09	1.50 ± 0.18	0	1.50 ± 0.18		1.5 ± 0.2
66.15	1.60 ± 0.18	0	1.60 ± 0.18		1.6 ± 0.2
71.21	0.94 ± 0.14	+0.02	0.96 ± 0.14		0.96 ± 0.14
76.25	0.78 ± 0.12	-0.01	0.77 ± 0.12		0.77 ± 0.12
86.29	0.035 ± 0.025	-0.005	0.030 ± 0.025		0.030 ± 0.025
101.38	0.076 ± 0.034	0	0.076 ± 0.034		0.076 ± 0.034
140.82	0.072 ± 0.028	0	0.072 ± 0.028		0.072 ± 0.028
	±3%		±3%		±4%
Erreur globale					

RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire

200 MeV

Impulsion dans le système du centre de masse

300.55 MeV/c

θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_A$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_F$
11.23	459.3 ± 16.4	0	459.3 ± 16.4	1.047 ± 0.013	480.5 ± 17.3
12.26	421.4 ± 13.1	0	421.4 ± 13.1		441.0 ± 13.9
15.35	356.3 ± 10.8	0	356.3 ± 10.8		372.7 ± 12.9
20.48	225.9 ± 3.6	0	225.9 ± 3.6		236.2 ± 3.9
25.62	129.3 ± 2.7	-1.8	127.5 ± 2.7		133.5 ± 2.9
30.77	59.2 ± 1.8	-1.3	57.9 ± 1.8		60.6 ± 1.9
35.88	21.2 ± 0.7	-1.0	20.2 ± 0.7		21.2 ± 0.8
41.20	4.20 ± 0.31	-0.53	3.67 ± 0.31		3.84 ± 0.33
46.31	0.54 ± 0.11	-0.13	0.41 ± 0.11		0.43 ± 0.12
48.86	0.51 ± 0.10	-0.06	0.45 ± 0.10		0.47 ± 0.10
51.41	0.30 ± 0.08	-0.08	0.22 ± 0.08		0.23 ± 0.08
53.96	0.91 ± 0.12	+0.04	0.95 ± 0.12		0.99 ± 0.13
56.50	1.05 ± 0.10	+0.03	1.08 ± 0.10		1.13 ± 0.10
61.48	1.31 ± 0.14	+0.01	1.32 ± 0.14		1.38 ± 0.15
66.55	1.06 ± 0.13	+0.01	1.07 ± 0.13		1.12 ± 0.14
71.60	0.69 ± 0.18	0	0.69 ± 0.18		0.72 ± 0.19
76.65	0.30 ± 0.04	-0.01	0.29 ± 0.04		0.30 ± 0.04
81.68	0.15 ± 0.02	-0.01	0.14 ± 0.02		0.15 ± 0.02
91.70	0.013 ± 0.006	0	0.013 ± 0.006		0.014 ± 0.006
101.67	0.026 ± 0.008	0	0.026 ± 0.008		0.027 ± 0.008
121.46	0.021 ± 0.006	0	0.021 ± 0.006		0.022 ± 0.006
141.08	0.042 ± 0.029	0	0.042 ± 0.029		0.044 ± 0.030
	±3%		±3%		±4%

Erreur globale

RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire					
230 MeV					
Impulsion dans le système du centre de masse					
331.42 MeV/c					
θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A^*$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$
10.42	450.8 ± 16.7	0	450.8 ± 16.7	1.084 ± 0.012	488.7 ± 18.1
11.46	414.4 ± 15.2	0	414.4 ± 15.2		449.2 ± 16.5
12.49	399.8 ± 12.4	0	399.8 ± 12.4		433.4 ± 13.4
15.58	322.9 ± 9.1	0	322.9 ± 9.1		350.0 ± 9.9
20.74	189.7 ± 4.3	0	189.7 ± 4.3		205.6 ± 4.7
25.90	93.9 ± 2.2	0	93.9 ± 2.2		101.8 ± 2.4
31.03	34.8 ± 1.0	-1.3	33.5 ± 1.0		36.3 ± 1.1
36.19	11.7 ± 0.4	-0.8	10.9 ± 0.4		11.8 ± 0.4
41.20	1.89 ± 0.16	-0.32	1.57 ± 0.16		1.71 ± 0.17
43.76	1.07 ± 0.15	-0.13	0.94 ± 0.15		1.02 ± 0.16
46.32	0.77 ± 0.09	-0.04	0.73 ± 0.09		0.79 ± 0.10
48.87	1.04 ± 0.15	-0.03	1.01 ± 0.15		1.09 ± 0.16
51.42	1.08 ± 0.11	+0.02	1.10 ± 0.11		1.19 ± 0.12
56.52	1.54 ± 0.18	+0.03	1.57 ± 0.18		1.70 ± 0.20
61.61	1.45 ± 0.21	+0.02	1.47 ± 0.21		1.59 ± 0.23
66.68	0.69 ± 0.11	-0.01	0.68 ± 0.11		0.74 ± 0.12
71.74	0.60 ± 0.22	-0.02	0.58 ± 0.22		0.63 ± 0.24
	±3%		±3%		±4%
Erreur globale					

RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire 260 MeV					
Impulsion dans le système du centre de masse 361.67 MeV/c					
θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A^*$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$
10.45	522.3 ± 46.3	0	522.3 ± 46.3	1.01 ± 0.02	527.5 ± 46.8
11.49	445.4 ± 26.3	0	445.4 ± 26.3		449.9 ± 26.6
13.04	450.8 ± 23.8	0	450.8 ± 23.8		455.3 ± 24.0
15.63	303.9 ± 8.6	0	303.9 ± 8.6		306.9 ± 8.7
20.78	183.9 ± 4.4	0	183.9 ± 4.4		185.7 ± 4.4
25.95	83.5 ± 2.0	-3.0	80.5 ± 2.0		81.3 ± 2.0
31.12	30.3 ± 0.9	-1.5	28.8 ± 0.9		29.1 ± 0.9
36.26	8.2 ± 0.5	-0.8	7.4 ± 0.5		7.5 ± 0.5
38.72	4.21 ± 0.49	-0.53	3.68 ± 0.49		3.72 ± 0.49
41.29	1.72 ± 0.26	-0.31	1.41 ± 0.26		1.42 ± 0.26
43.86	1.08 ± 0.20	-0.13	0.95 ± 0.20		0.96 ± 0.20
46.42	1.47 ± 0.21	+0.03	1.50 ± 0.21		1.51 ± 0.21
48.98	1.80 ± 0.22	+0.08	1.88 ± 0.22		1.90 ± 0.22
51.54	1.81 ± 0.22	+0.03	1.84 ± 0.22		1.86 ± 0.22
56.64	1.42 ± 0.19	+0.01	1.43 ± 0.19		1.44 ± 0.19
61.73	1.09 ± 0.16	0	1.09 ± 0.16		1.10 ± 0.16
66.81	0.52 ± 0.10	-0.01	0.51 ± 0.10		0.52 ± 0.10
71.88	0.37 ± 0.09	-0.01	0.36 ± 0.09		0.36 ± 0.09
	±3%		±3%		±4%
Erreur globale					

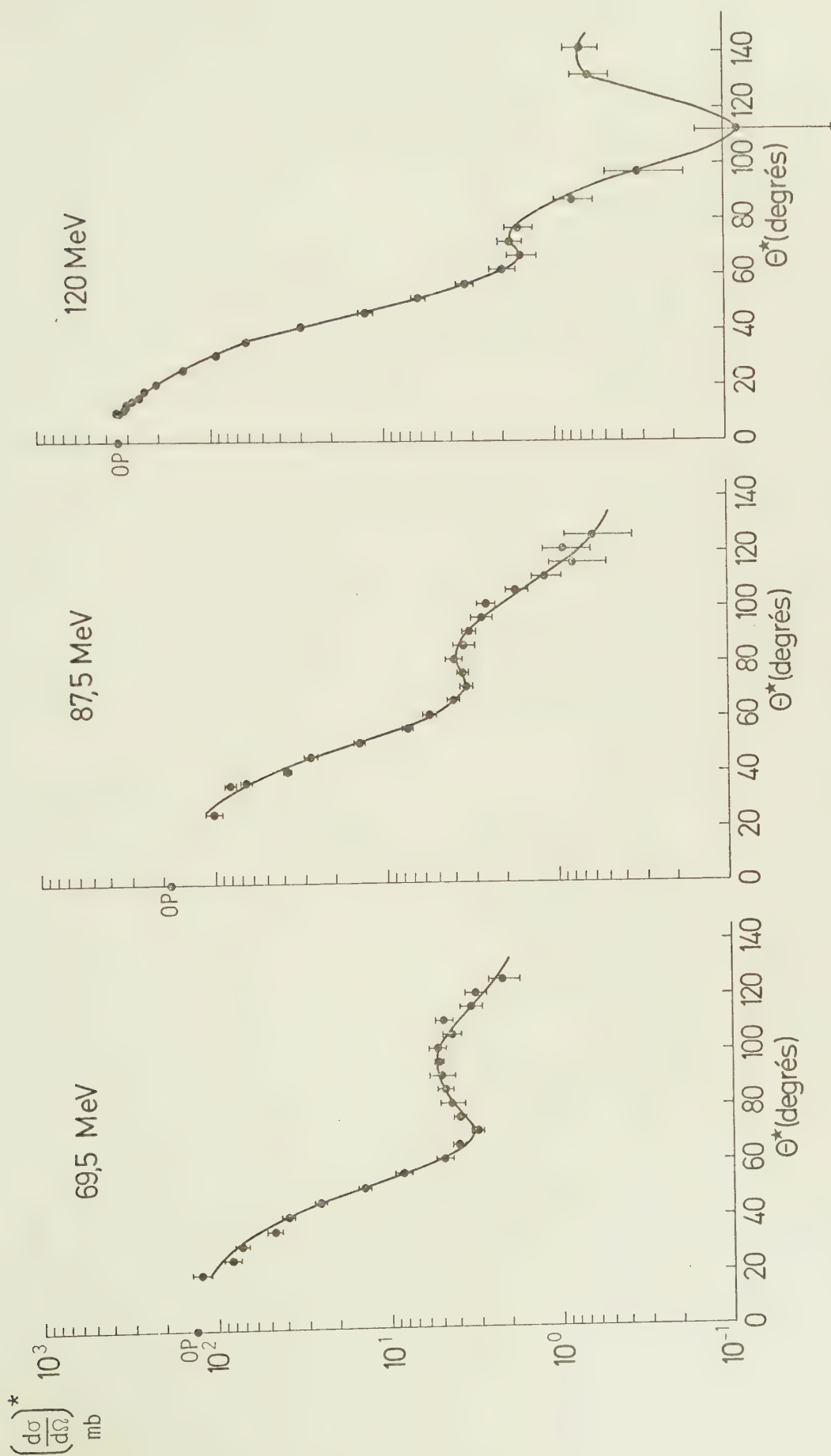
RESULTATS I

Sections efficaces différentielles élastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire 280 MeV					
Impulsion dans le système du centre de masse 381.60 MeV/c					
θ^* deg	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*$	Corr. angle fini	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A^*$	Facteur d'échelle	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_F^*$
10.99	386.9 ± 14.2	0	386.9 ± 14.2	1.16 ± 0.06	448.8 ± 16.5
12.55	354.1 ± 12.7	+0.1	354.2 ± 12.7		410.9 ± 14.7
15.13	281.6 ± 9.0	-0.9	280.7 ± 9.0		325.6 ± 10.4
17.72	221.6 ± 6.8	-1.6	220.0 ± 6.8		255.2 ± 7.9
20.31	156.2 ± 4.7	-1.9	154.3 ± 4.7		179.0 ± 5.5
25.49	69.1 ± 2.4	-1.5	67.6 ± 2.4		78.4 ± 2.3
30.64	24.1 ± 1.0	-0.9	23.2 ± 1.0		26.9 ± 1.2
35.81	5.6 ± 0.4	-0.49	5.11 ± 0.4		5.93 ± 0.5
41.46	1.61 ± 0.13	-0.20	1.41 ± 0.13		1.64 ± 0.21
44.03	1.31 ± 0.15	-0.09	1.22 ± 0.15		1.42 ± 0.17
46.59	1.57 ± 0.17	-0.02	1.55 ± 0.17		1.80 ± 0.20
49.15	1.46 ± 0.16	+0.01	1.47 ± 0.16		1.70 ± 0.19
51.71	1.36 ± 0.16	+0.01	1.37 ± 0.16		1.59 ± 0.19
56.82	1.37 ± 0.16	+0.01	1.38 ± 0.16		1.60 ± 0.19
61.92	0.88 ± 0.12	0	0.88 ± 0.12		1.02 ± 0.14
67.00	0.60 ± 0.10	0	0.60 ± 0.10		0.70 ± 0.12
72.07	0.15 ± 0.05	0	0.15 ± 0.05		0.17 ± 0.06
131.09	≤ 0.045		≤ 0.045		≤ 0.052
	±3%		±3%		±7%
Erreur globale					

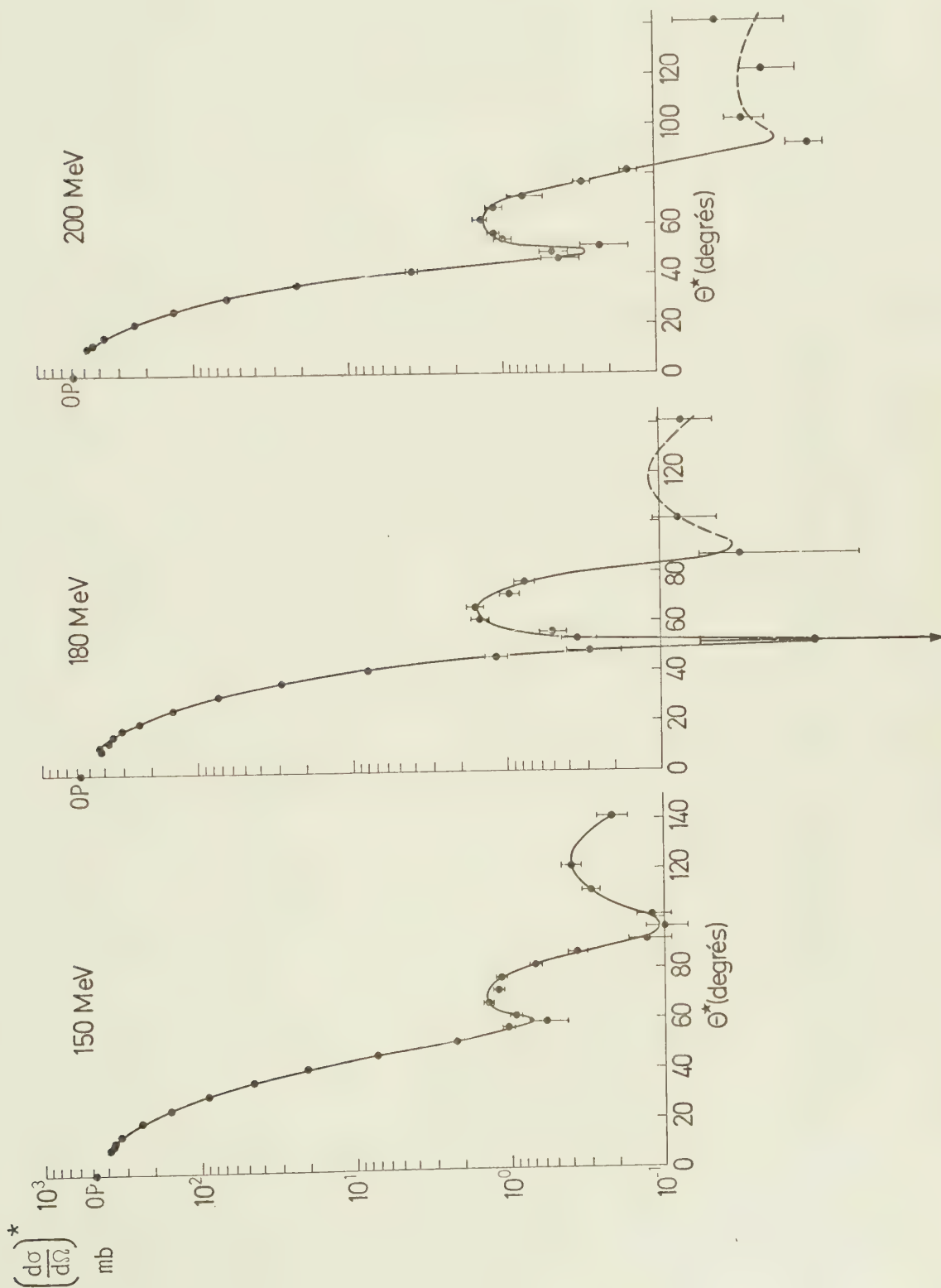
RESULTATS II

Sections efficaces différentielles élastiques



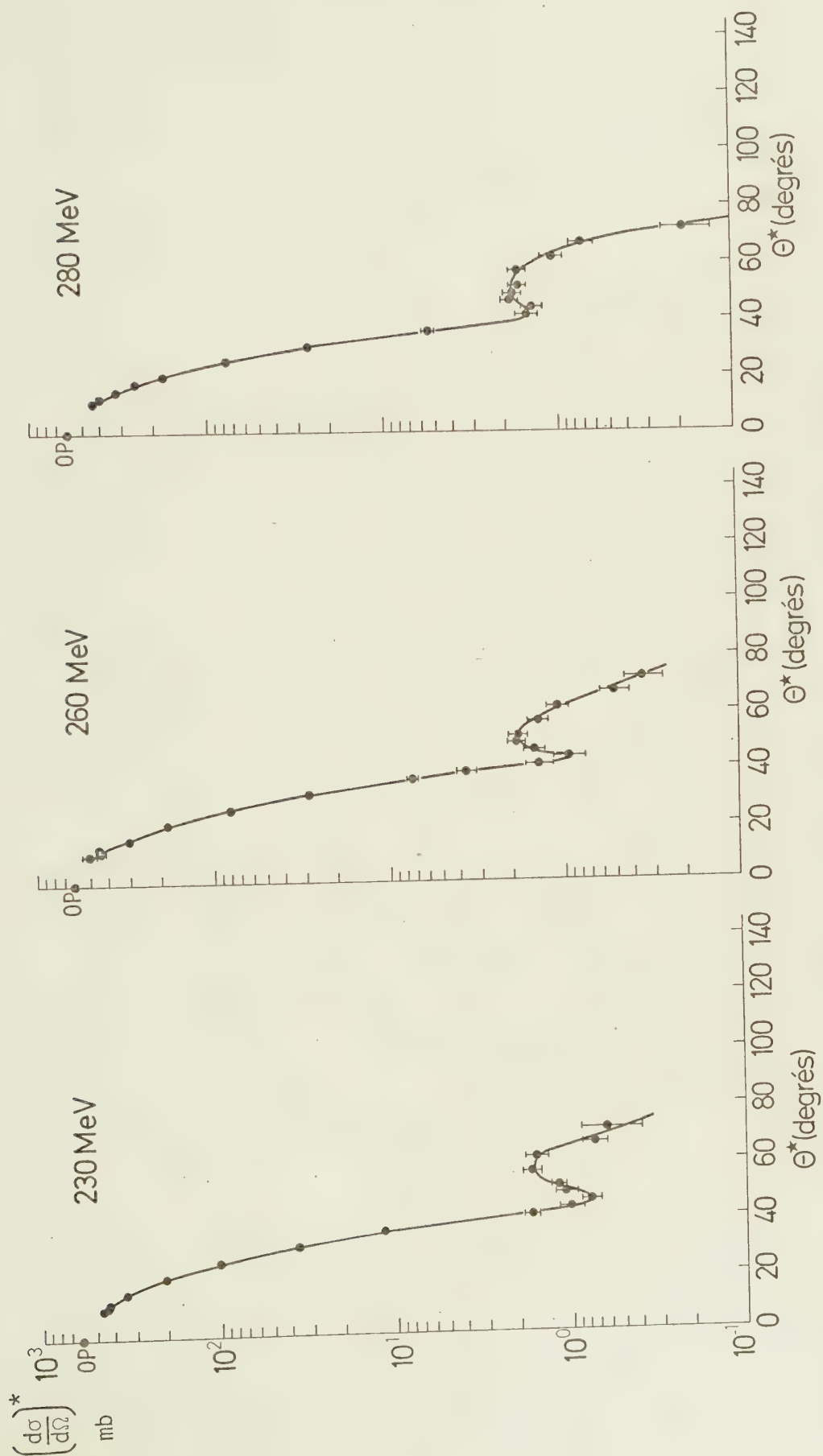
RESULTATS II

Sections efficaces différentielles élastiques



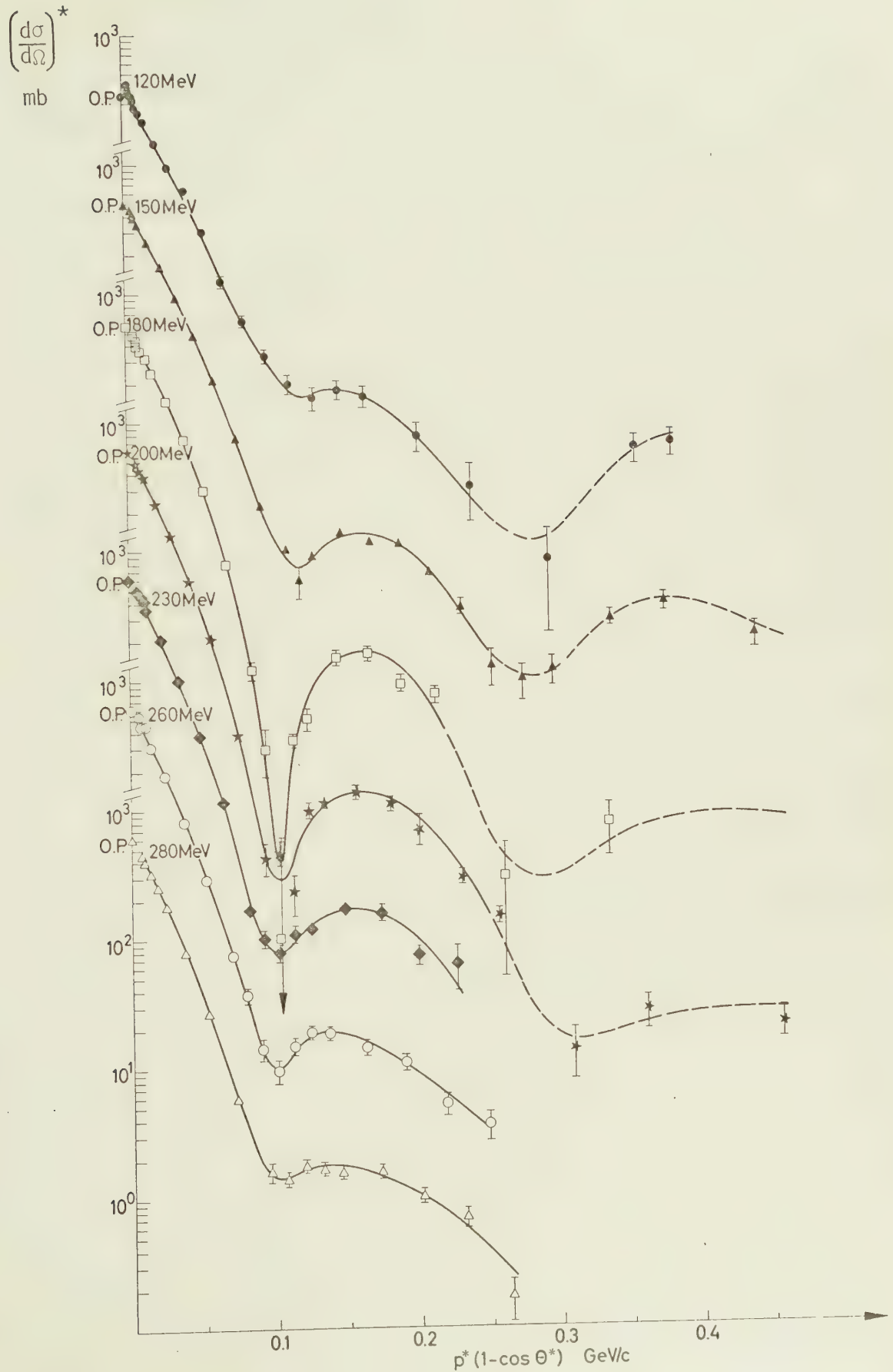
RESULTATS II

Sections efficaces différentielles élastiques



RESULTATS III

Sections efficaces différentielles élastiques



C. Diffusion inélastique

La largeur de l'hodoscope terminal correspond à une plage d'énergie de 9 à 18 MeV suivant l'énergie de réglage du spectromètre. En même temps que le pic élastique, nous pouvons donc observer les niveaux inélastiques de 4,4, 7,7, 9,6 et même le groupe $T = 1 \sim 15$ MeV (à partir de 200 MeV seulement).

L'excitation du niveau à 7,7 MeV est extrêmement faible (1 ou 2 ordres de grandeur en dessous des autres) et, le plus souvent, n'était pas discernable.

Les contributions éventuelles des niveaux à 10,3 et 10,8 MeV n'ont pas été soustraits des distributions du 9,6 MeV, la séparation n'étant pas possible dans nos conditions expérimentales. L'excitation des premiers niveaux $T = 1$ correspond à des sections efficaces du même ordre de grandeur que pour les niveaux $T = 0$, ce qui est en accord avec la règle suivant laquelle les changements $\Delta T = 0, 1$ et 2 sont réalisables avec des pions. Cependant l'excitation des niveaux $T = 2$ n'est pas démontrée dans notre expérience où nous n'avons identifié aucun niveau au-delà de 15 MeV.

- Le Tableau IV donne les valeurs des sections efficaces différentielles inélastiques

$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_I^*$, sans correction d'angle fini et sans application du facteur d'échelle.

- Les mêmes résultats sont ensuite représentés sous la forme des courbes V.

Nous n'avons fait aucune tentative d'analyse.

RESULTATS IV

Sections efficaces différentielles inélastiques

Energie cinétique dans le système du laboratoire en MeV	120	150	180
Impulsion dans le système du centre de masse en MeV/c	213.92	247.38	279.57
	$\theta_{\text{deg.}}^*$ $(d\sigma/d\Omega)_i^*$ mb/sr	$\theta_{\text{deg.}}^*$ $(d\sigma/d\Omega)_i^*$ mb/sr	$\theta_{\text{deg.}}^*$ $(d\sigma/d\Omega)_i^*$ mb/sr
4.44 MeV	21.05 ≤ 6.18	20.50 ≤ 4.74	17.88 6.35 ± 6.35
	26.16 ≤ 2.79	25.62 4.8 ± 1.4	20.46 ≤ 3.6
	31.36 1.19 ± 1.13	30.74 2.8 ± 0.6	25.49 5.7 ± 1.9
	36.46 1.30 ± 0.47	35.85 3.5 ± 0.3	30.61 3.2 ± 0.6
	41.55 1.46 ± 0.43	40.95 2.6 ± 0.2	35.73 3.6 ± 0.3
	46.64 2.20 ± 0.52	46.04 2.22 ± 0.14	40.74 2.1 ± 0.3
	51.72 1.29 ± 0.28	51.13 1.42 ± 0.10	45.85 2.1 ± 0.2
	56.78 0.64 ± 0.19	56.20 0.91 ± 0.06	48.39 1.3 ± 0.2
	61.85 0.67 ± 0.21	58.74 0.72 ± 0.06	50.94 1.12 ± 0.12
	66.90 0.20 ± 0.12	61.273 0.31 ± 0.06	53.48 0.81 ± 0.14
	71.94 0.12 ± 0.09	66.33 0.16 ± 0.05	56.02 0.37 ± 0.09
	76.98 0.17 ± 0.15	71.38 0.18 ± 0.05	61.10 0.18 ± 0.07
	87.01 0.33 ± 0.13	76.42 0.20 ± 0.05	66.16 0.020 ± 0.03
	97.01 1.16 ± 0.26	81.44 0.36 ± 0.06	71.22 0.06 ± 0.04
	111.94 0.19 ± 0.14	86.46 0.38 ± 0.05	76.26 0.08 ± 0.05
	141.70 0.38 ± 0.14	91.46 0.37 ± 0.06	86.30 0.15 ± 0.06
	141.54 0.55 ± 0.15	96.46 0.45 ± 0.05	101.28 0.02 ± 0.02
		101.44 0.35 ± 0.05	110.72 0.19 ± 0.05
		111.37 0.35 ± 0.04	
		121.26 0.15 ± 0.04	
		140.93 0.33 ± 0.03	
7.65 MeV	87.01 0.37 ± 0.15	61.28 0.11 ± 0.06	66.17 0.068 ± 0.039
	111.94 0.57 ± 0.20	66.34 0.06 ± 0.05	101.28 0.05 ± 0.03
			139.7 0.01 ± 0.03
9.64 MeV		30.74 0.63 ± 0.04	17.89 0.85 ± 0.36
		35.85 0.75 ± 0.21	30.51 0.51 ± 0.70
		40.95 0.89 ± 0.17	35.63 1.16 ± 0.33
		46.05 0.93 ± 0.12	40.73 1.49 ± 0.22
		51.13 0.88 ± 0.10	45.85 1.18 ± 0.14
		56.21 0.68 ± 0.06	48.40 0.94 ± 0.17
		58.75 0.48 ± 0.06	50.95 1.10 ± 0.12
		61.28 0.40 ± 0.07	53.49 0.92 ± 0.15
		66.34 0.38 ± 0.06	56.03 0.85 ± 0.15
		71.39 0.18 ± 0.05	61.31 0.49 ± 0.11
		76.43 0.16 ± 0.05	66.17 0.068 ± 0.05
		81.45 0.17 ± 0.05	71.22 0.11 ± 0.05
		86.47 0.28 ± 0.05	76.26 0.19 ± 0.07
		91.47 0.32 ± 0.07	87.71 0.08 ± 0.05
		96.47 0.34 ± 0.05	101.29 0.14 ± 0.05
		101.45 0.37 ± 0.05	
		111.38 0.34 ± 0.04	
		121.27 0.29 ± 0.04	
		140.94 0.23 ± 0.04	
T = 1 ~ 15.1 MeV			

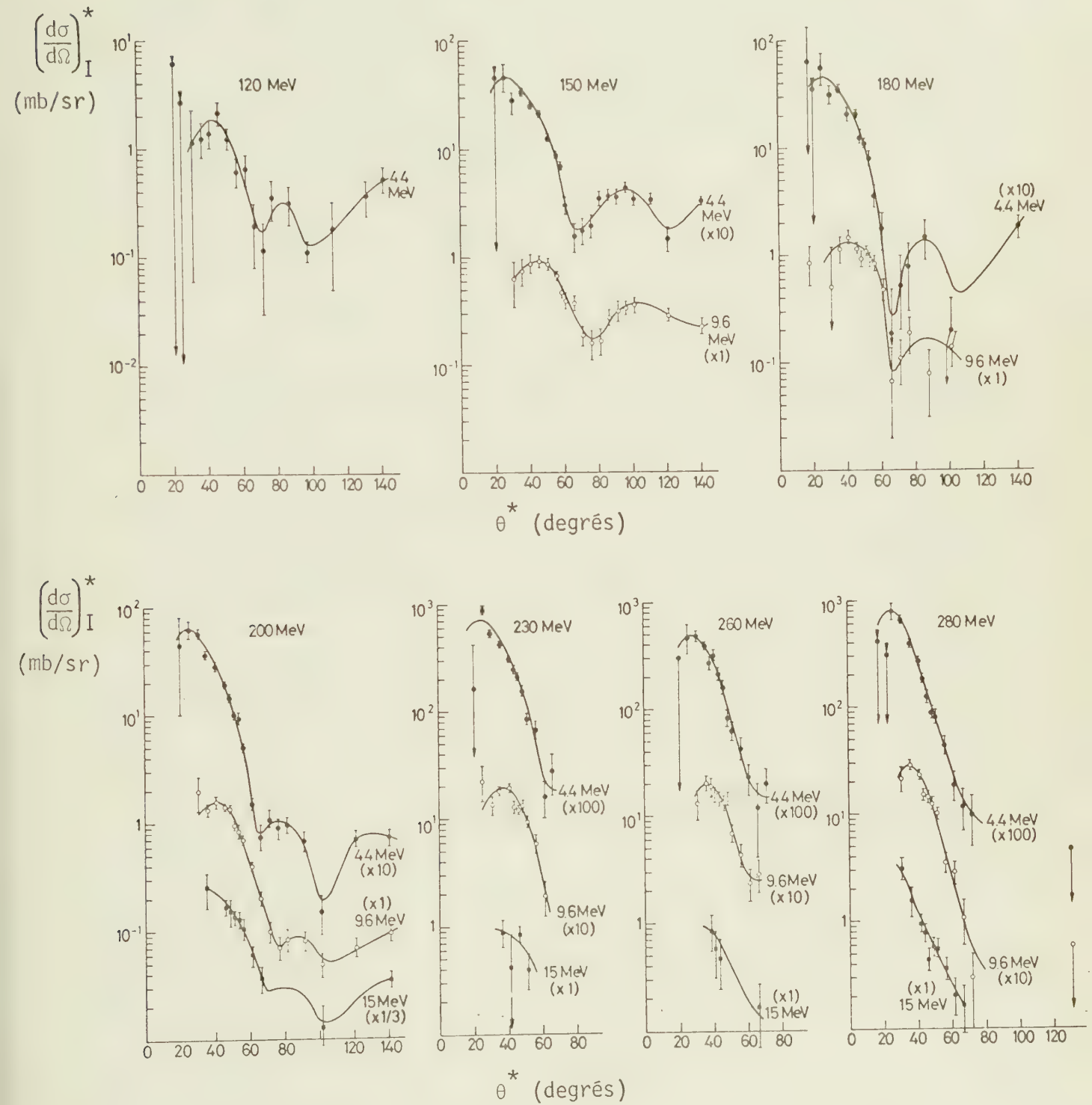
RESULTATS IV

Sections efficaces différentielles inélastiques (suite)

200	230	260	280
300.55	331.42	361.67	381.60
$\theta_{deg.}$ $(d\sigma/d\Omega)_1$ mb/sr	$\theta_{deg.}$ $(d\sigma/d\Omega)_1$ mb/sr	$\theta_{deg.}$ $(d\sigma/d\Omega)_1$ mb/sr	$\theta_{deg.}$ $(d\sigma/d\Omega)_1$ mb/sr
20.59 4.6 ± 3.6 25.73 6.3 ± 1.2 30.86 7.7 ± 0.6 35.99 5.6 ± 0.3 41.11 2.9 ± 0.3 46.21 1.92 ± 0.12 48.77 1.45 ± 0.13 51.31 1.01 ± 0.08 53.86 0.94 ± 0.12 56.40 0.50 ± 0.05 61.48 0.15 ± 0.02 66.55 0.075 ± 0.020 71.61 0.11 ± 0.02 76.65 0.089 ± 0.019 81.68 0.095 ± 0.016 91.70 0.067 ± 0.014 101.67 0.015 ± 0.006 121.47 0.071 ± 0.012 141.08 0.071 ± 0.013	20.54 1.67 ± 2.55 25.69 9.0 ± 0.9 30.83 5.4 ± 0.4 36.07 4.32 ± 0.15 41.20 3.13 ± 0.19 43.76 2.48 ± 0.23 46.32 2.15 ± 0.15 48.87 1.56 ± 0.18 51.43 0.85 ± 0.10 56.52 0.68 ± 0.13 61.61 0.16 ± 0.06 66.68 0.285 ± 0.12	20.79 ≤ 3.06 25.95 4.69 ± 1.43 31.1 4.92 ± 0.54 36.25 3.97 ± 0.32 38.73 2.74 ± 0.41 41.29 3.24 ± 0.36 43.86 2.16 ± 0.28 46.42 1.67 ± 0.22 48.98 0.83 ± 0.15 51.54 0.64 ± 0.13 56.64 0.44 ± 0.10 61.74 0.23 ± 0.07 66.82 0.12 ± 0.08 72 0.20 ± 0.07	17.74 ≤ 4.92 20.32 ≤ 3.21 25.99 7.9 ± 1.4 31.16 6.69 ± 0.57 36.31 3.96 ± 0.33 41.46 2.72 ± 0.26 44.02 1.89 ± 0.21 46.59 1.27 ± 0.17 49.15 0.90 ± 0.13 51.71 0.81 ± 0.13 56.82 0.45 ± 0.09 61.92 0.19 ± 0.06 67.0 0.12 ± 0.05 72.1 0.10 ± 0.05 130.1 ≤ 0.049
30.86 1.99 ± 0.70 35.99 1.33 ± 0.17 41.11 1.57 ± 0.20 46.22 1.41 ± 0.10 48.77 1.35 ± 0.12 51.32 0.95 ± 0.09 53.87 0.84 ± 0.12 56.41 0.70 ± 0.07 61.49 0.110 ± 0.04 66.56 0.20 ± 0.03 71.61 0.099 ± 0.022 76.66 0.070 ± 0.017 81.69 0.084 ± 0.017 91.71 0.081 ± 0.016 101.68 0.049 ± 0.012 121.47 0.069 ± 0.014 141.09 0.092 ± 0.015	25.16 2.28 ± 0.80 30.94 1.35 ± 0.27 36.07 1.82 ± 0.15 41.20 1.95 ± 0.18 43.76 1.29 ± 0.18 46.32 1.23 ± 0.12 48.88 1.32 ± 0.18 51.43 0.93 ± 0.12 56.53 0.59 ± 0.12 61.61 0.19 ± 0.07	31.11 1.33 ± 0.41 36.26 2.05 ± 0.33 38.73 1.90 ± 0.37 41.30 1.61 ± 0.26 43.86 1.47 ± 0.24 46.42 1.31 ± 0.21 48.99 1.47 ± 0.20 51.54 0.70 ± 0.14 56.65 0.45 ± 0.11 61.74 0.24 ± 0.08 66.82 0.25 ± 0.10	31.16 2.18 ± 0.56 36.31 2.90 ± 0.30 41.46 2.34 ± 0.24 44.03 1.53 ± 0.19 46.60 1.47 ± 0.19 49.16 1.27 ± 0.17 51.72 1.01 ± 0.14 56.83 0.36 ± 0.08 61.92 0.29 ± 0.07 67.00 0.11 ± 0.05 72.10 0.03 ± 0.02 131.68 ≤ 0.06
35.99 0.76 ± 0.27 46.22 0.51 ± 0.08 48.78 0.46 ± 0.13 51.33 0.41 ± 0.06 53.87 0.39 ± 0.07 56.42 0.32 ± 0.07 61.50 0.18 ± 0.04 66.56 0.11 ± 0.03 101.69 0.038 ± 0.012 141.09 0.105 ± 0.018	36.10 0.88 ± 0.25 41.21 0.42 ± 0.42 46.33 0.85 ± 0.15 51.44 0.40 ± 0.15	38.41 0.85 ± 0.35 40.96 0.57 ± 0.27 43.51 0.45 ± 0.24 66.35 0.17 ± 0.10	31.16 3.18 ± 0.75 36.32 1.60 ± 0.51 41.46 0.97 ± 0.19 44.03 0.78 ± 0.15 46.60 0.45 ± 0.11 49.16 0.59 ± 0.12 51.72 0.57 ± 0.11 56.83 0.37 ± 0.09 61.93 0.21 ± 0.08 67.01 0.17 ± 0.08

RESULTATS V

Sections effaces différentielles inélastiques



Une étude particulière de diffusion inélastique a été effectuée à 260 MeV, où nous avons mesuré des particules ayant perdu jusqu'à 100 MeV dans l'interaction pour des angles fixes entre 30 et 70°.

Il est facile d'intégrer les distributions qui tendent rapidement vers zéro lorsque l'énergie d'excitation augmente. On peut calculer la section efficace différentielle inélastique globale, avec conservation du pion incident, par l'intégrale

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi}^{\pi} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}\right)_{\pi} dE, \text{ étendue à tous les niveaux.}$$

Les valeurs obtenues sont les suivantes :

θ°	0	30	40	50	60	70
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi}^{\pi} \frac{\text{mb}}{\text{Sr}}$	54,7±5	30±5	19±4	13±5	8±2	5,3±2,5

La courbe VI montre une décroissance très régulière de cette grandeur en fonction de l'angle.

La valeur à 0° est obtenue à partir des calculs de sections efficaces totales (Voir prochain Chapitre).

Une nouvelle intégration angulaire donne la section efficace totale inélastique globale, avec conservation du pion incident

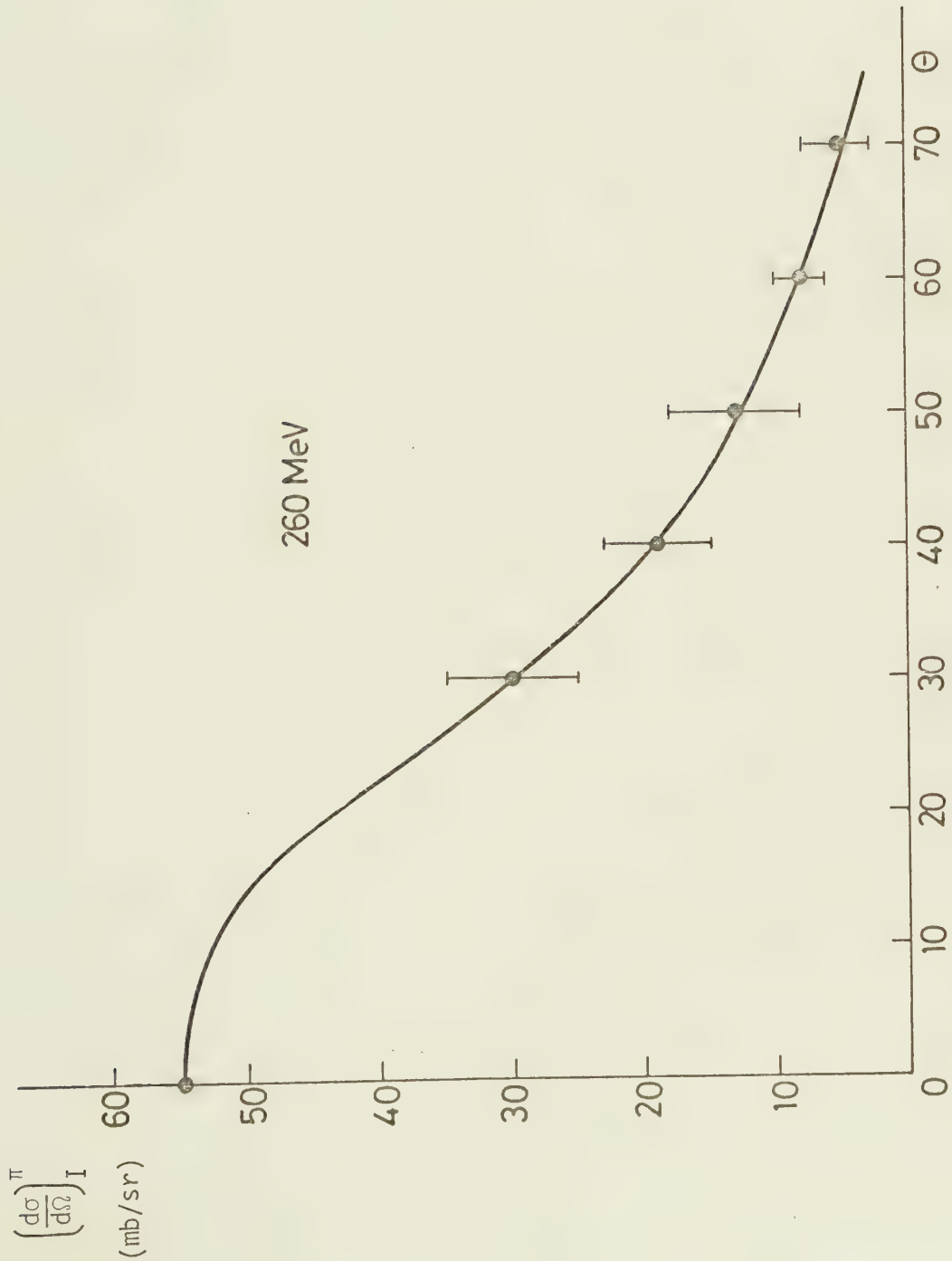
$$\sigma_{\pi}^{\pi} = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi}^{\pi} d\Omega \sim 100 \text{ mb.}$$

On peut calculer le moment transversal moyen du spectre. On trouve

$$\overline{p \sin \theta} \sim 230 \text{ MeV/c.}$$

RESULTATS VI

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_I^\pi = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}\right)_I dE$$



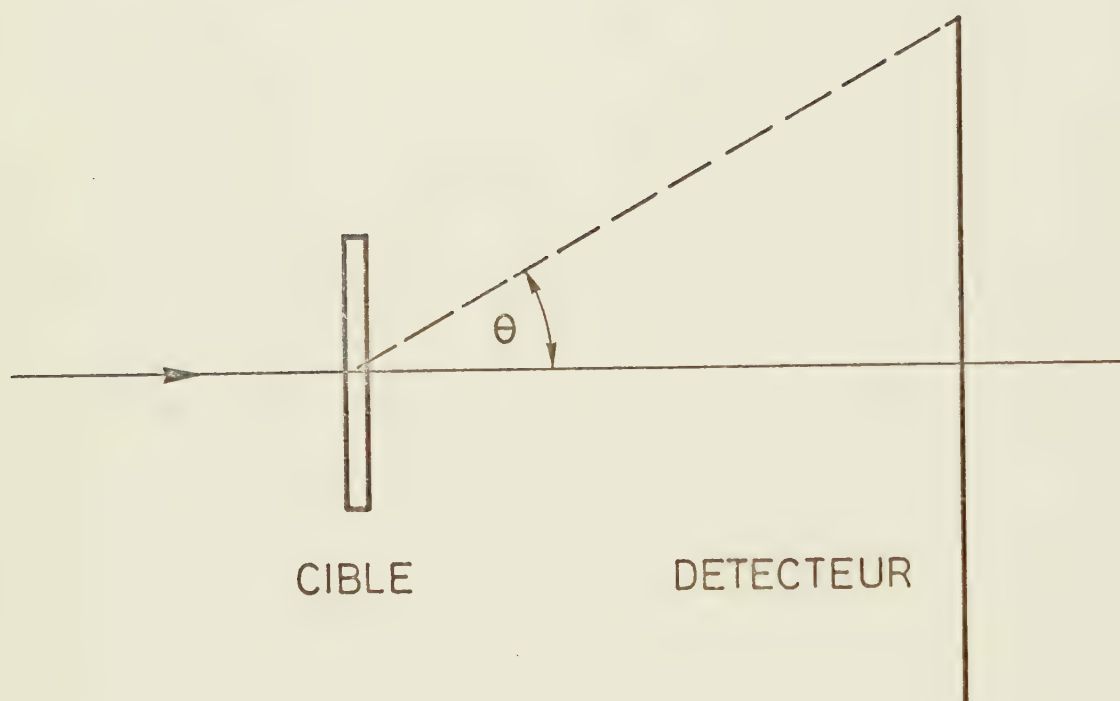


FIG. 55

C H A P I T R E V

LES SECTIONS EFFICACES TOTALES

A. Méthode de mesure. Appareillage

1. Définition théorique et détermination expérimentale

Imaginons un faisceau fin traversant une cible mince et disposons derrière cette cible un détecteur définissant un angle de coupure θ (Figure 55).

On peut calculer la proportion de particules enregistrées :

$$\frac{N}{N_0} = \exp \left[- \frac{Nm}{A} \left[\sigma_A + \int_{\theta}^{180} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta \right] \right]$$

où σ_A est la section efficace d'absorption.

Par définition, la section efficace totale

$$\sigma_T = \sigma_A + \int_0^{180} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta \text{ est la limite de la}$$

quantité qui figure dans l'exponentielle lorsque $\theta \rightarrow 0$.

La méthode par transmission consiste à déterminer le rapport

$$\frac{N}{N_0} \text{ en comparant les comptages avec et sans cible.}$$

On peut alors évaluer

$$\sigma_{\theta} = \sigma_A + \int_{\theta}^{180} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta \neq \frac{A}{Nm} \frac{N_0 - N}{N_0}$$

pour différentes valeurs de θ et faire une extrapolation vers $\theta = 0$.

Il faut insister sur le fait que seule la diffusion nucléaire nous intéresse, si bien qu'on doit écrire

$$\sigma_T = \sigma_{\theta} - \int_{\theta}^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C d\Omega + \int_0^{\theta} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E d\Omega + \int_0^{\theta} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_I^{\pi} d\Omega ,$$

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C$: section efficace différentielle coulombienne,

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E$: section efficace différentielle élastique,

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_I^{\pi}$: section efficace différentielle inélastique

correspondant à tous les processus inélastiques où la particule incidente est réémise.

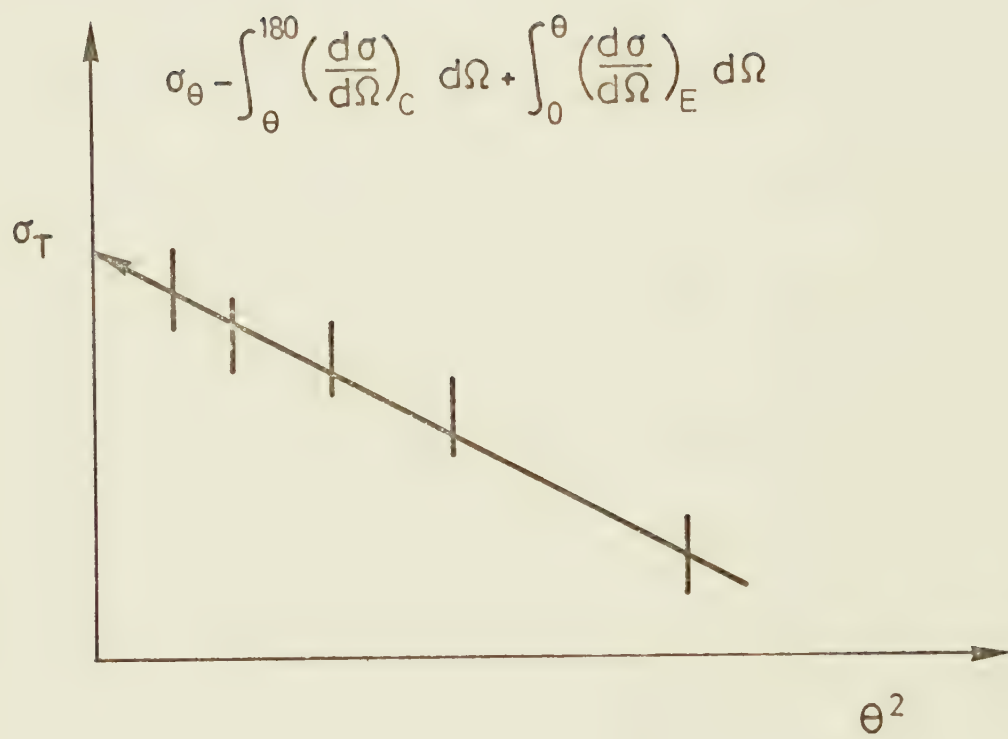


FIG. 56

Le sens physique de la notion de section efficace totale n'est pas évident puisque d'une part, il est impossible d'opérer dans les conditions géométriques idéales de la définition (trajectoires confondues suivant une droite mathématique, cible sans épaisseur, détecteur sans surface), et puisque d'autre part, l'intégrale

$$\int_0^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_C d\Omega \rightarrow \infty \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0$$

La valeur limite σ_T n'en est pas moins très clairement définie du point de vue mathématique et peut être obtenue en portant la quantité

$$\sigma_\theta = \int_0^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_C d\Omega \text{ en fonction de } \theta .$$

Comme les intégrales entre 0 et θ tendent vers zéro avec l'angle, l'extrapolation doit donner la section efficace totale.

Nous sommes dans la condition avantageuse de connaître les sections efficaces différentielles élastiques et pouvons porter la quantité

$$\sigma_\theta = \int_0^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_C d\Omega + \int_0^\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_E d\Omega ,$$

réduisant ainsi fortement la pente de la courbe et facilitant d'autant l'extrapolation. En fait cette circonstance favorable nous permet de gagner 1 ordre de grandeur dans la précision du résultat.

Il faut faire une hypothèse au sujet de la forme à donner à la courbe pour effectuer l'extrapolation.

L'écart résiduel avec la valeur σ_T représente

$$\int_0^\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_I^\pi d\Omega ,$$

et l'expérience montre que c'est une fonction linéaire de θ^2 entre 10° et 25° (Figure 56). Par ailleurs

$$\int_0^\theta 2 \pi \sin\theta d\theta = 2 \pi (1 - \cos \theta) \neq \pi\theta^2$$

et il est logique d'admettre que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_I^\pi = \text{cte à faible angle, puisque}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_I^\pi = \int_0^\infty \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} \right)_I dE \text{ est la somme de toutes les fonctions}$$

angulaires correspondant aux différents niveaux excités.

Quoi qu'il en soit nous adopterons cette loi d'extrapolation comme étant la plus simple en absence de tout soutien théorique.

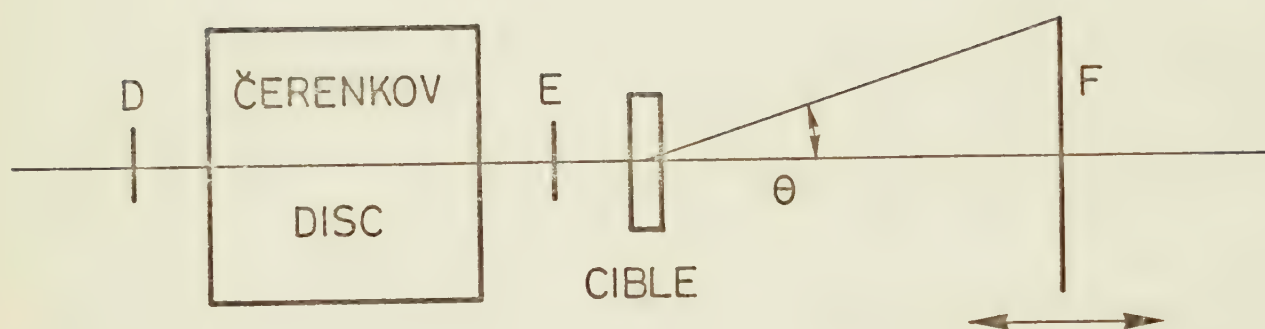


FIG. 57

Dans le même ordre d'idées il faut noter que le traitement ignore totalement les effets de l'interférence C.N. On peut écrire pour les sections efficaces différentielles élastiques mesurées :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{EM} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C + \phi,$$

ϕ représentant le terme d'interférence inconnu.

En fait il faudrait calculer

$$\sigma_T = \sigma_\theta - \int_\theta^{180} \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C + \phi \right] d\Omega + \int_0^\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E d\Omega + \int_0^\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_I \pi d\Omega$$

et on voit que la valeur limite de

$$\sigma_\theta - \int_\theta^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C d\Omega \quad \text{est} \quad \sigma_T + \int_0^{180} \phi d\Omega.$$

Ce manque de certitude théorique est regrettable. La difficulté vient de ce que la notion de section efficace totale ignore la diffusion coulombienne qui conduirait à une valeur infinie, alors que nous ne savons pas comment "soustraire" rigoureusement cette même diffusion coulombienne, pourtant présente dans nos mesures. En tout état de cause il importe de bien signaler les différentes sources d'erreurs.

2. Montage et faisceau

Le monochromateur et l'analyseur étant en ligne, le dispositif de mesure est installé à l'extrémité du double spectromètre achromatique.

L'appareillage comprend (Figure 57) :

- Deux scintillateurs D et E de 1 cm de diamètre et 2 mm d'épaisseur qui permettent de définir un faisceau étroit (distance DE = 76,5 cm).
- Une cible sur un support escamotable de telle sorte qu'on puisse à distance mettre la cible dans le faisceau ou la retirer à volonté.
- Un scintillateur F de 15 cm de diamètre et 5 mm d'épaisseur qui peut occuper différentes positions mécaniquement repérées de façon à faire varier l'angle de coupure θ .
- Entre les détecteurs D et E se trouve un compteur Čerenkov DISC⁽⁵⁵⁾ qui élimine toute contamination. Un tel compteur devant fonctionner en faisceau parallèle était difficile à utiliser dans les mesures de sections efficaces différentielles. Il est ici d'un emploi très commode.

Le déclenchement est réalisé par les coïncidences

AA'BCD (DISC) E et on enregistre

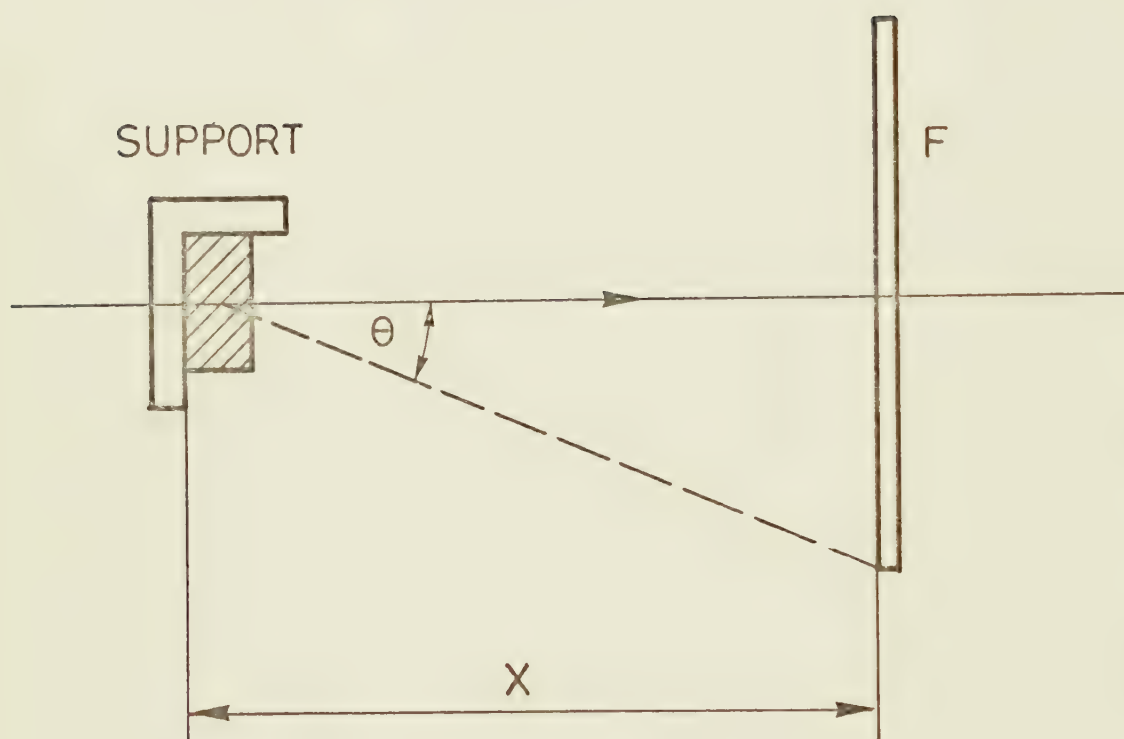


FIG. 58

AA'BCD (DISC) EF avec et sans cible en croisant les mesures dans le temps de manière à éviter tout effet de dérive.

On utilise des cibles de carbone de 1, 2, 3 et 4 cm d'épaisseur avec des densités $\neq 2$. Les mesures sont faites pour 5 positions différentes de F (Figure 58), la distance X entre les faces avant de la cible et du compteur valent 18, 24, 30, 36 et 42 cm.

Avec une fente source de 8 mm et un réglage suffisamment large du DISC ($\frac{\Delta\beta}{\beta} \sim 1\%$) la définition du faisceau est inférieure à 2 % en $\frac{\Delta p}{p}$.

L'intensité du faisceau est $\sim 0,5\%$ de l'intensité normale, avec des taux de comptage ~ 200 particules par seconde. Ceci est essentiellement dû à la définition extrêmement étroite imposée par les scintillateurs D et E.

Dans ces conditions les erreurs produites par les défauts de l'électronique sont absolument négligeables. L'efficacité du compteur F n'intervient pas non plus puisqu'il est utilisé aussi bien pour évaluer N et N_0 , et que seul le rapport N/N_0 compte.

3. Fonctionnement du compteur DISC

Le compteur DISC utilisé comporte :

- Une cellule cylindrique contenant un liquide dans lequel les particules provoquent une émission de photons par effet Čerenkov. Par rapport à la direction du faisceau, la direction de propagation de la lumière fait un angle tel que

$$\cos \theta_I = \frac{1}{\beta n} \text{ à l'intérieur de la cellule et}$$

$$\sin \theta_E = n \sin \theta_I \text{ à l'extérieur,}$$

n étant l'indice du milieu.

- Un miroir sphérique qui renvoie la lumière en la focalisant sur un diaphragme annulaire.

- Un axicon, tore à section prismatique limité par des dioptries coniques, servant à corriger les aberrations optiques du système.

Le principe de l'axicon (Voir figure 59) repose sur le fait qu'il est possible de corriger les aberrations d'ouverture d'un miroir sphérique pour un point source à l'infini, au moyen d'une lame à faces parallèles normale au faisceau incident. Si la lame est convenablement choisie les surfaces caustiques du miroir et de la lame sont pratiquement confondues et le miroir peut être utilisé jusqu'à 45° d'incidence.

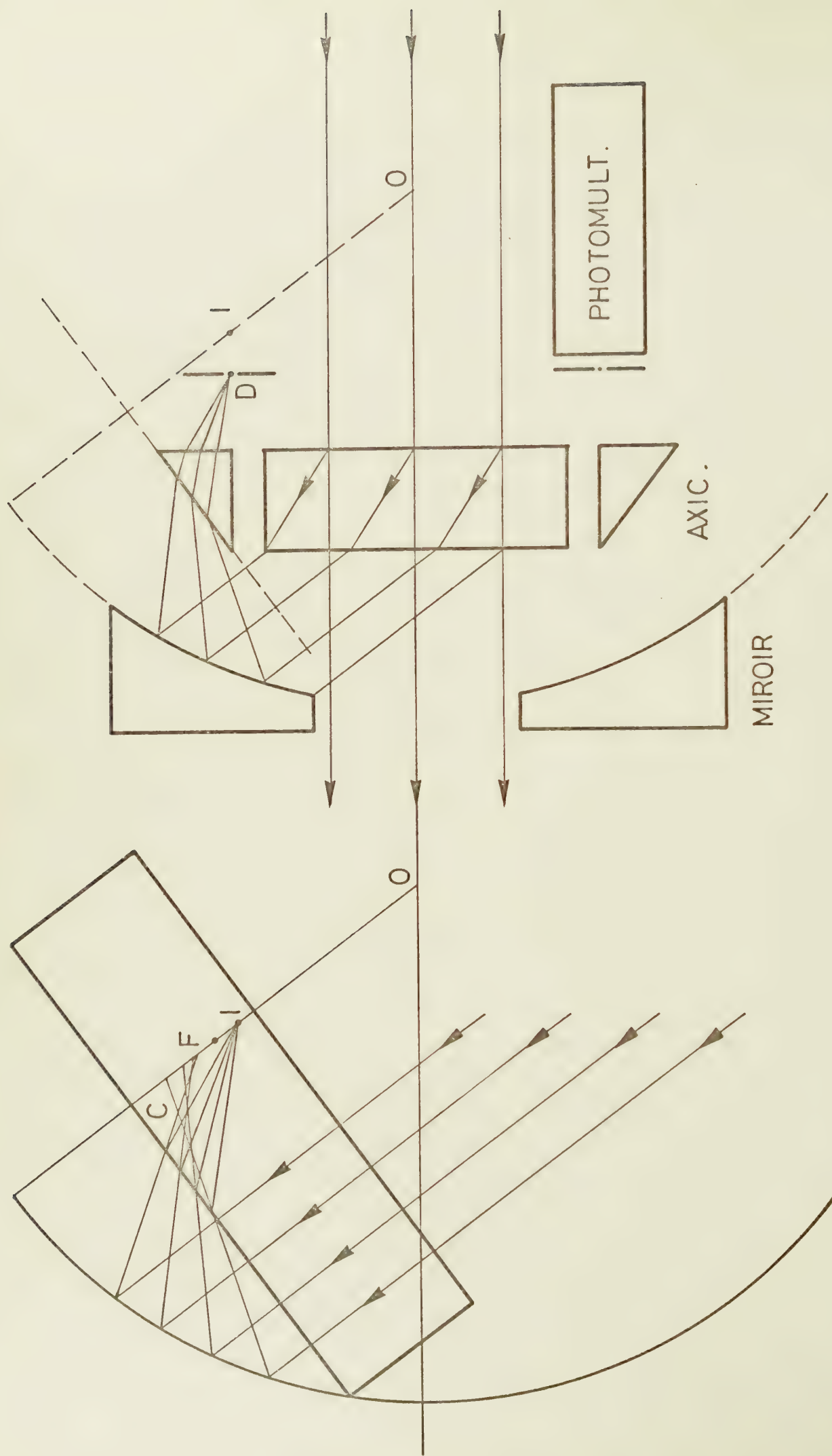


FIG. 59

Dans la réalisation effective du correcteur seul le dioptré en vis-à-vis du miroir joue un rôle important. Le dioptré de sortie peut être taillé à peu près normalement aux rayons et a pour effet principal de déplacer quelque peu le point de focalisation de l'ensemble.

- Une couronne de photomultiplicateurs mis en coïncidence est disposée derrière le diaphragme.

Compte tenu du spectre d'émission Čerenkov, de la transparence des milieux utilisés et de la sensibilité des photocathodes, l'appareil a été calculé pour des longueurs d'onde $\sim 0,45 \mu$.

Le but recherché est d'obtenir une focalisation sur un diaphragme de rayon fixe, pour une certaine gamme de vitesse, ou, ce qui revient au même, pour une certaine gamme de valeur θ_E . On y arrive en déplaçant l'axicon, une augmentation de θ_E étant compensée par une diminution de la distance Axicon-Miroir, et vice versa.

Le compteur utilisé est prévu pour fonctionner avec des angles $55^\circ < \theta_E < 60^\circ$. On peut en déduire les indices nécessaires pour sélectionner des particules de vitesses données. En effet

$$n^2 \sin^2 \theta_I = n^2 - \frac{1}{\beta^2} = \sin^2 \theta_E \sim 0,7 ,$$

et on trouve par exemple pour

$$E_\pi = 120 \text{ MeV} , \quad \beta = 0,843 , \quad n \sim 1,455 ,$$

$$E_\pi = 180 \text{ MeV} , \quad \beta = 0,943 , \quad n \sim 1,355 .$$

La divergence angulaire des trajectoires doit être faible puisque la résolution

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = \tan \theta_I \Delta \theta_I$$

est proportionnelle à l'acceptance angulaire du compteur. Cette acceptance est d'ailleurs réglable grâce aux lèvres mobiles du diaphragme (montage à lames).

Nous avons opéré avec

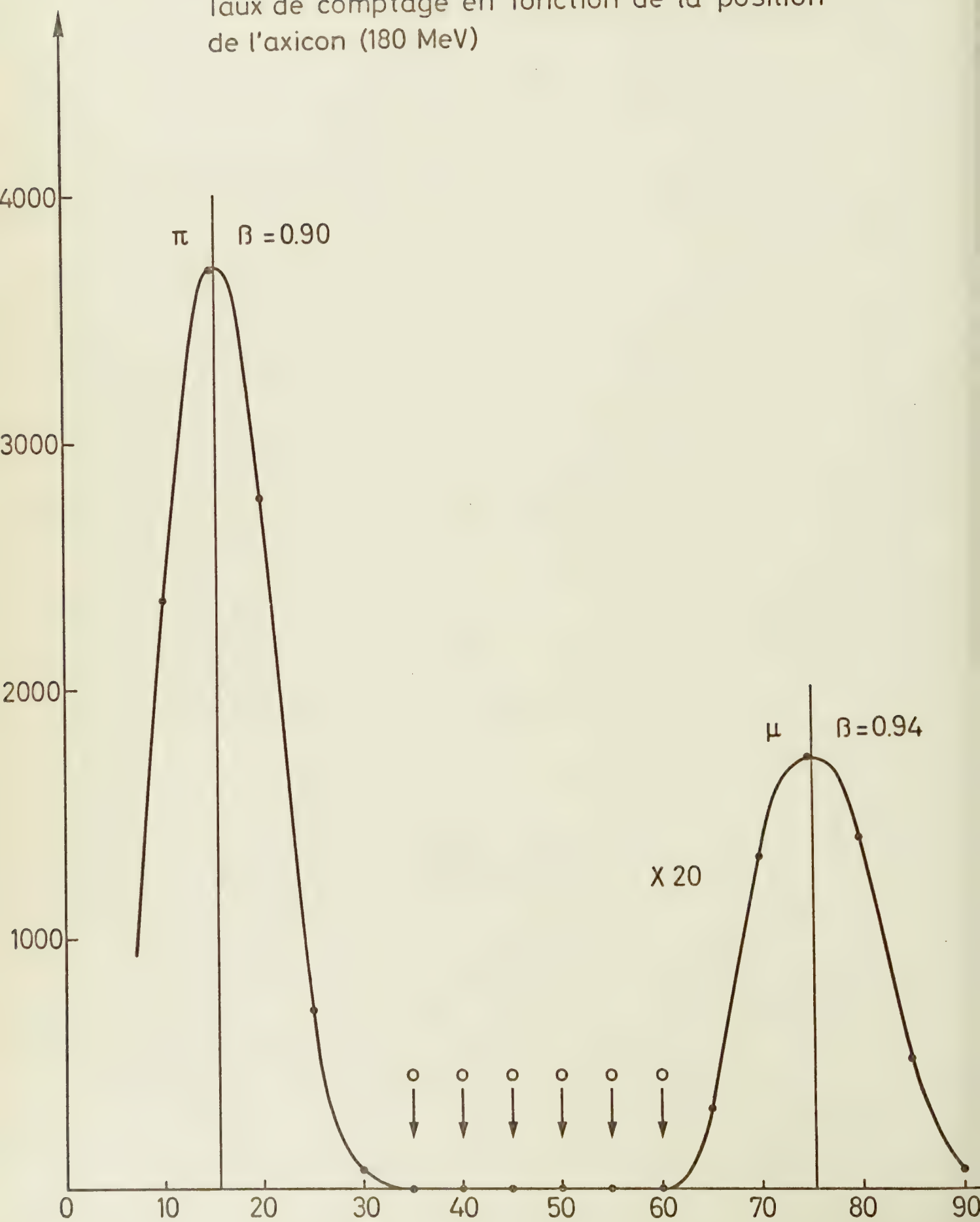
$\Delta \theta_I = 10$ ou 15 milliradians, ce qui correspond dans tous les cas à $\frac{\Delta \beta}{\beta} \sim 1 \%$.

Dans ces conditions il est facile de voir que les π et les μ fournis par le spectromètre sont aisément séparables. En effet on a la relation

$$\frac{dp}{p} = \frac{dm}{m} + \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta} \neq 0$$

FIGURE 60

Taux de comptage en fonction de la position
de l'axicon (180 MeV)



et la condition à remplir s'écrit

$$\frac{\Delta m}{m} > \gamma^2 \frac{\Delta \beta}{\beta} = 9 \% \text{ à } 280 \text{ MeV,}$$

avec
$$\frac{\Delta m}{m} = 2 \frac{m_{\pi} - m_{\mu}}{m_{\pi} + m_{\mu}} = 28 \% .$$

Les cellules avaient 2 ou 3 cm d'épaisseur et contenaient des solutions de glycérine dans l'eau :

Epaisseur	% glycérine	Indice	Energie
3	8,25	1,3503	280
3	16,2	1,36025	
2	24,0	1,3699	
2	31,7	1,3801	
2	46,3	1,4000	
2	62,15	1,4252	
2	85,5	1,4596	120
2	100,0	1,4763	<110

La Figure 60 montre la séparation des π et des μ à 180 MeV. En dessous de cette énergie il fallait changer de cellule pour observer séparément les π et les μ . Pour observer les électrons il aurait fallu un indice $\sim 1,3$ nettement inférieur à celui de l'eau pour $\lambda = 0,45\mu$ (on pourrait prendre $(C^{25}F^5)_2O$).

Un programme permet de calculer, pour une cellule donnée, la position de l'axicon correspondant à la particule désirée et le réglage des deux bords du diaphragme qui donne l'acceptance géométrique désirée.

4. Evaluation des pertes par ralentissement

Un point important est celui de l'évaluation des pertes par ralentissement. En effet il faut calculer, à partir de l'énergie de réglage de l'aimant MCA, d'une part, l'énergie obtenue au centre de la cellule du DISC, d'autre part, l'énergie obtenue au centre de la cible de mesure.

La première de ces deux valeurs permet de déterminer a priori quel doit être le réglage du compteur Čerenkov et la vérification expérimentale de ce réglage constitue un test de validité concernant l'évaluation de la seconde, qui est l'énergie de mesure.

Une comptabilité très soignée des matériaux dans le faisceau a donc été effectuée. A partir du centre de l'aimant MCA les particules traversent :

La fenêtre de mylar du tube à vide,

Les scintillateurs de l'hodoscope (+ enveloppe);

Le compteur C (+ enveloppe),

Le compteur D (+ enveloppe),

La fenêtre de mylar à l'entrée du DISC,

La 1ère paroi de silice de la cellule,

Le liquide constituant le radiateur,

La 2ème paroi de silice de la cellule,

La fenêtre de mylar à la sortie du DISC,

Le compteur E (+ enveloppe).

Il faut enfin ajouter la moitié de l'épaisseur de la cible de carbone.

Les calculs sont effectués au moyen des tables de pouvoir d'arrêt (56) et donnent les résultats suivants dans nos conditions de mesures (en MeV) :

E(AIMANT)	E(DISC)	E (cible)				cm
		1	2	3	4	
135	129,54	123,6	121,6	119,6	-	
166	160,91	-	153,4	151,5	149,6	
195	190,20	-	183,1	181,3	179,4	
215	210,30	205,1	203,3	201,5	-	
242	236,34	-	228,4	226,7	224,9	
275	269,45	263,5	261,7	259,9	258,2	
295	289,47	283,5	281,8	280,0	-	

La vérification de ces calculs au moyen du DISC indique une précision de 0,5 à 1 MeV pour l'évaluation de ces énergies moyennes. On ne peut espérer mieux étant donnée la définition énergétique du faisceau.

B. Erreurs et corrections

1. Corrections d'absorption dans la cible

Le ralentissement dans la cible n'est pas négligeable ($\sim 3,6$ MeV/cm à 200 MeV). Dans ces conditions l'affaiblissement du faisceau en fonction de la distance X parcourue est donné par la loi

$$N = N_0 e^{-K \int_0^X \sigma_{\theta E(x)} dx}.$$

La quantité mesurée n'est pas $\sigma_{\theta E(X/2)}$ mais

$$\sigma_M = \frac{1}{KX} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) = \frac{1}{X} \int_0^X \sigma_{\theta E(x)} dx.$$

Cherchons une correction qui permette d'atteindre la valeur $\sigma_{\theta E(X/2)}$ à partir de la valeur σ_M .

On peut développer

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_0^X \sigma_{\theta E(x)} dx &= \frac{1}{X} \int_0^X \sigma_{\theta E(X/2)} dx \\ &+ \frac{1}{X} \int_0^X \left(x - \frac{X}{2}\right) \left[\frac{d\sigma_{\theta E(x)}}{dx} \right]_{X/2} dx \\ &+ \frac{1}{2X} \int_0^X \left(x - \frac{X}{2}\right)^2 \left[\frac{d^2\sigma_{\theta E(x)}}{dx^2} \right]_{X/2} dx \\ &= \sigma_{\theta E(X/2)} + \frac{X^2}{24} \left[\frac{d^2\sigma_{\theta E(x)}}{dx^2} \right]_{X/2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_0^X \sigma_{\theta E(x)} dx &= -\frac{1}{KX} L \left| \frac{N}{N_0} \right| = -\frac{1}{KX} L |1 - KX \sigma_M| \\ &= \sigma_M + KX \frac{\sigma_M^2}{2} + K^2 X^2 \frac{\sigma_M^3}{3} \dots \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions on voit que

$$\sigma_{\theta E(X/2)} = \sigma_M + KX \frac{\sigma_M^2}{2} + \frac{X^2}{3} \left[K^2 \sigma_M^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{d^2\sigma_{\theta E}}{dx^2} \right) \right].$$

On peut remplacer

$\frac{d^2\sigma_{\theta E}}{dx^2}$ par $\frac{d^2\sigma_M}{dx^2}$ dans le terme du second ordre et on obtient finalement

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta E(X/2)} &= \sigma_M + KX \frac{\sigma_M^2}{2} + \frac{X^2}{3} \left[K^2 \sigma_M^3 - \frac{1}{8} \frac{d^2\sigma_M}{dE^2} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{d\sigma_M}{dE} \frac{d^2E}{dx^2} \right]. \end{aligned}$$

La première correction peut atteindre 10 % de la valeur mesurée σ_M , ce qui est considérable. La deuxième correction n'est que de quelques millibarns.

2. Corrections de largeur angulaire

Nous avons déjà établi la relation générale qui donne la correction de largeur angulaire et nous l'avons appliquée aux sections efficaces différentielles.

La même correction doit être appliquée aux différentes grandeurs physiques qui servent à calculer les sections efficaces totales, à savoir

$$\sigma_M = \int_0^\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E d\Omega \quad \text{et} \quad \int_0^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C d\Omega.$$

a) L'évaluation de la dérivée seconde $\frac{d^2\sigma_M}{d\theta^2}$ n'est possible qu'à condition de disposer de valeurs σ_M suffisamment précises. Nous commençons donc par nous préoccuper de la précision statistique des mesures.

A partir de la définition

$$\sigma_M = K \left(1 - \frac{N}{N_0}\right), \quad \text{il est facile d'établir la relation}$$

$$\frac{\Delta\sigma_M}{\sigma_M} = \frac{N}{N_0 - N} \sqrt{\left(\frac{\Delta N_0}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2}$$

qui donne l'écart type $\Delta\sigma_M$ en fonction de

$$\Delta N_0 = \sqrt{M - N_0}$$

et $\Delta N = \sqrt{M - N}$ où M est le taux de comptage du moniteur.

Donnons quelques valeurs obtenues à 260 MeV :

Pour $X = 18 \text{ cm}$ ($\theta \sim 24^\circ$)

Cible	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
Moniteur	650 000	400 000	250 000	200 000
N_0	644 148	396 393	247 729	198 250
N	621 484	370 006	224 457	173 274
$(\Delta N_0/N_0)^2$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-8}$
$(\Delta N/N)^2$	$7,4 \cdot 10^{-8}$	$22,0 \cdot 10^{-8}$	$50,8 \cdot 10^{-8}$	$89,1 \cdot 10^{-8}$
$\Delta\sigma_M/\sigma_M$	0,81 %	0,68 %	0,71 %	0,67 %

Moyenne quadratique : 0,72 %.

Pour $X = 42 \text{ cm}$ ($\theta \sim 10^\circ$)

Cible	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
Moniteur	650 000	350 000	250 000	200 000
N_0	643 042	346 311	247 390	197 898
N	611 232	314 077	215 262	163 710
$(\Delta N_0/N_0)^2$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-8}$
$(\Delta N/N)^2$	$10,4 \cdot 10^{-8}$	$36,4 \cdot 10^{-8}$	$75,1 \cdot 10^{-8}$	$135,4 \cdot 10^{-8}$
$\Delta\sigma_M/\sigma_M$	0,67 %	0,61 %	0,59 %	0,57 %

Moyenne quadratique : 0,61 %.

Un calcul plus rapide (mais optimiste) peut être fait en admettant que

$M - N_0 \neq 0$. On trouve alors

$$\frac{\Delta\sigma_M}{\sigma_M} \neq \frac{\Delta N}{N_0 - N} \neq \frac{1}{\sqrt{N_0 - N}}.$$

On voit que la précision statistique est essentiellement fonction de $N_0 - N$. Dans la prise des données, nous avons croisé les mesures, avec et sans cible, jusqu'à obtenir des écarts totaux

$$N_0 - N \sim 25\ 000 \text{ à } 30\ 000.$$

Connaissant les barres d'erreur, il est maintenant possible de faire un graphe

$\sigma_M = f(\theta)$ et de voir si on obtient une fonction présentant une courbure appréciable.

Ce n'est pas le cas. On doit admettre qu'il est très facile de faire passer une droite par toutes les barres d'erreur et il faut conclure que la dérivée seconde doit être prise égale à zéro. On peut seulement estimer une limite supérieure

$$\left| \frac{d^2\sigma_M}{d\theta^2} \right|_{\text{Max}} \sim 0,5 \text{ à } 1 \text{ mb/deg}^2.$$

Comme $\langle \Delta\theta^2 \rangle \sim 1 \text{ à } 2 \text{ (deg)}^2$, l'erreur qui nous échappe est sans doute inférieure au millibarn.

b) Nous savons qu'on peut écrire à faible angle

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_E = a e^{-\frac{2p^2(1-\cos\theta)}{b}}, \text{ } a \text{ et } b \text{ étant connus d'après nos}$$

mesures de sections efficaces différentielles. On peut alors calculer

$$\int_0^\theta a e^{-\frac{2p^2(1-\cos\theta)}{b}} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{\pi ab}{p^2} \left[1 - e^{-\frac{2p^2(1-\cos\theta)}{b}} \right].$$

Dans la pratique nous calculerons

$$S_E = \frac{\pi ab}{p^2} \left[1 - e^{-\frac{p^2\theta^2}{b}} \right] \text{ et la correction}$$

$$\Delta S_E = \pi a \langle \Delta\theta^2 \rangle e^{-\frac{p^2\theta^2}{b}} \left[1 - 2 \frac{p^2\theta^2}{b} \right].$$

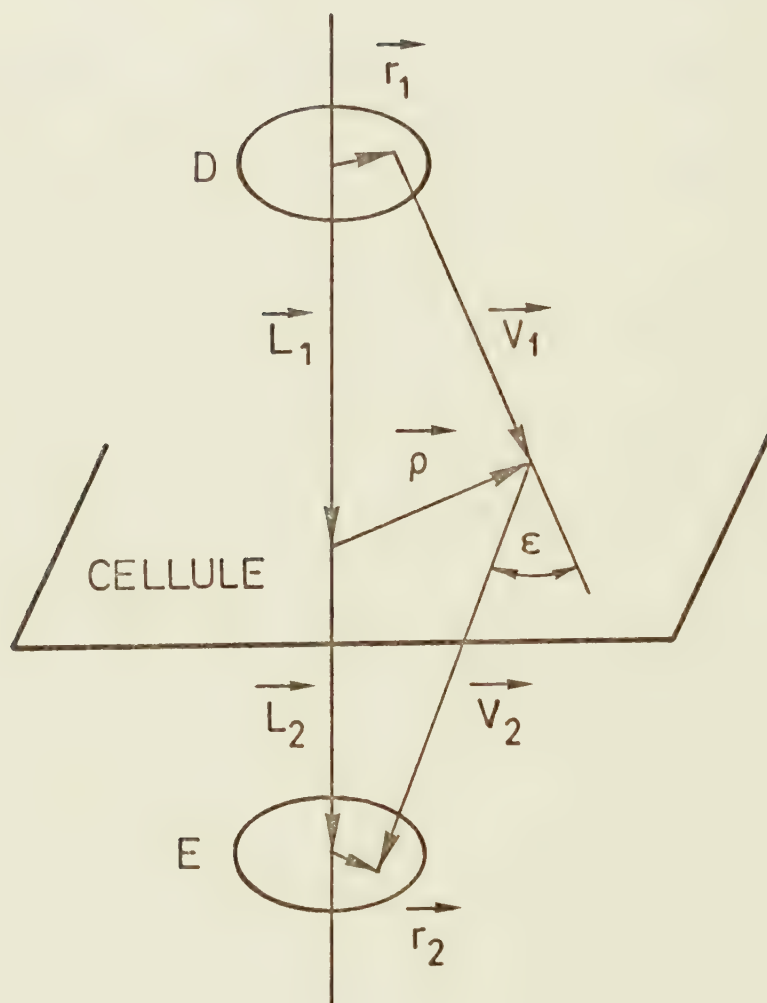


FIG. 61

c) Faisons encore le calcul pour le terme coulombien. Soit

$$S_C = \int_0^{180} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_C d\Omega = K \int_0^{180} \frac{d\theta}{\theta^3} = \frac{K}{2\theta^2}.$$

On trouve

$$S_C = \frac{3}{2} \frac{K}{\theta^4} \langle \Delta\theta^2 \rangle, \text{ d'où la formule très simple}$$

$$\frac{\Delta S_C}{S_C} = 3 \frac{\langle \Delta\theta^2 \rangle}{\theta^2}.$$

Cette correction est généralement négligeable.

3. Evaluation de la dispersion angulaire $\langle \Delta\theta^2 \rangle$

Nous avons déjà insisté sur le fait que le compteur DISC ne limitait pas le faisceau ($\Delta\theta = 10$ ou 15 milliradians). Par contre nous avons pu constater lors des essais préliminaires que le fait de mettre les scintillateurs D et E dans le déclencheur réduisait considérablement le taux de comptage. On peut donc admettre que l'angle solide ainsi défini est bien rempli par le faisceau. Malheureusement le calcul doit faire intervenir également la diffusion coulombienne multiple dans la cellule du DISC. Nous traiterons d'abord ce problème du calcul de $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{D(DISC)E}$.

Il faudra ensuite ajouter plusieurs termes :

- $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\Delta F}$ correspondant à l'incertitude qui résulte de la largeur du faisceau,
- $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\Delta XF}$ correspondant à l'incertitude qui résulte de l'épaisseur de la cible,
- $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{MS}$ dû à la diffusion multiple dans E et la cible.

a) Calcul de $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{D(DISC)E}$.

Nous utiliserons les notations de la Figure 61 :

$\vec{r}_1$ définit dans le plan du compteur D le point de passage de la particule dirigée suivant $\vec{V}_1$,

$\vec{p}$ définit dans le plan du diffuseur (cellule) le point de passage de la particule qui subit une déviation angulaire ϵ ,

$\vec{r}_2$ définit dans le plan du compteur E le point de passage de la particule dirigée suivant $\vec{V}_2$,

$\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$ correspondent aux distances entre les plans. $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ et $\vec{p}$ peuvent être quelconques (mais $\ll L_1$ et L_2).

Soient

$$\vec{V}_1 = \vec{L}_1 + \vec{\rho} - \vec{r}_1 \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \vec{L}_2 + \vec{r}_2 - \vec{\rho}.$$

On peut calculer

$$\cos \epsilon = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|} = \frac{L_1 L_2 - \rho^2 + \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1 + \vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\sqrt{L_1^2 + \rho^2 + r_1^2 - 2\vec{\rho} \cdot \vec{r}_1} \sqrt{L_2^2 + \rho^2 + r_2^2 - 2\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2}}$$

et en développant au second ordre

$$1 - \frac{\epsilon^2}{2} = 1 - \frac{\rho^2}{L_1 L_2} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_1}{L_1 L_2} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2}{L_1 L_2} - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{L_1 L_2} - \frac{\rho^2}{2 L_1^2} - \frac{r_1^2}{2 L_1^2} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_1}{L_1^2} - \frac{\rho^2}{2 L_2^2} - \frac{r_2^2}{2 L_2^2} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2}{L_2^2}.$$

Avant de passer aux valeurs moyennes il convient de faire quelques remarques

$$\langle \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \rangle = 0 \quad \text{mais}$$

$$\langle \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 \rangle \quad \text{sont} \neq 0.$$

En effet $\vec{\rho}$ est en corrélation avec $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ car l'angle ϵ doit rester faible. Pour $\epsilon = 0$ on aurait

$$\frac{\vec{V}_1}{L_1} = \frac{\vec{V}_2}{L_2} \quad \text{soit} \quad \vec{\rho} = \frac{L_2 \vec{r}_1 + L_1 \vec{r}_2}{L_1 + L_2}.$$

Il faut donc écrire

$$\vec{\rho} = \frac{L_2 \vec{r}_1 + L_1 \vec{r}_2}{L_1 + L_2} + \Delta \vec{\rho} \quad \text{et il en résulte que}$$

$$\langle \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1 \rangle = \frac{L_2 \langle r_1^2 \rangle}{L_1 + L_2}, \quad \langle \vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 \rangle = \frac{L_1 \langle r_2^2 \rangle}{L_1 + L_2}$$

tandis que

$$\langle \Delta \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1 \rangle = \langle \Delta \vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 \rangle = 0.$$

Dans ces conditions on trouve facilement

$$\langle \rho^2 \rangle (L_1 + L_2)^2 = L_1^2 L_2^2 \langle \epsilon^2 \rangle + L_2^2 \langle r_1^2 \rangle + L_1^2 \langle r_2^2 \rangle.$$

Il ne reste plus qu'à calculer

$$\cos \Delta \theta = \frac{\vec{L}_2 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{L}_2| |\vec{V}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{L_2^2} + \frac{r_2^2}{L_2^2} - 2 \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2}{L_2^2}}}.$$

On développe, on passe aux valeurs moyennes, on remplace $\langle \rho^2 \rangle$ et on trouve

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = \left[\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] \langle \epsilon^2 \rangle + \frac{\langle r_1^2 \rangle + \langle r_2^2 \rangle}{(L_1 + L_2)^2}$$

ou

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle_{D(DISC)E} = \left[\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] \langle \Delta \theta^2 \rangle_{DISC} + \langle \Delta \theta^2 \rangle_{DE}.$$

Dans la pratique la relation sera utilisée avec les angles projetés

$$\langle \Delta \theta^2_{proj} \rangle = \frac{1}{2} \langle \Delta \theta^2 \rangle.$$

Le terme purement géométrique se calcule avec

$$\langle r_1^2 \rangle = \langle r_2^2 \rangle = \frac{\phi^2}{8} \quad (\phi \text{ diamètre des compteurs}).$$

On trouve

$$\langle \Delta \theta^2_{proj} \rangle_{DE} = 0,214 \cdot 10^{-4} \equiv (4,6 \text{ mrd})^2.$$

On calcule la diffusion coulombienne multiple au moyen de la formule

$$\langle \Delta \theta^2_{proj} \rangle_{DISC} = \left(\frac{15}{p\beta} \right)^2 \frac{L}{L_R}$$

qui donne des angles en radian si p est exprimé en MeV/c et l'épaisseur dans la même unité que la longueur de radiation.

Le plus simple est de comparer à la longueur de radiation du carbone qui vaut $42,5 \text{ g/cm}^2$, en admettant que L_R est inversement proportionnelle au nombre atomique moyen du milieu diffuseur.

Dans le cas d'une solution de glycérine ($C^3H^8O^3 = 92$) dans l'eau ($H^2O = 18$) on peut calculer

$$\bar{Z} = \frac{230 - 5c}{69 - 6c} \quad \text{où } c \text{ est la concentration.}$$

Par ailleurs on connaît la densité

$$\rho = 1 + 0,26 c.$$

Faisons le calcul à 260 MeV :

$$c = 8,25 \%, \quad \bar{Z} = 3,35, \quad \rho = 1,02.$$

Il vient

$$L_R = 42,5 \frac{12}{3,35} = 152 \text{ g/cm}^2 \quad \text{et}$$

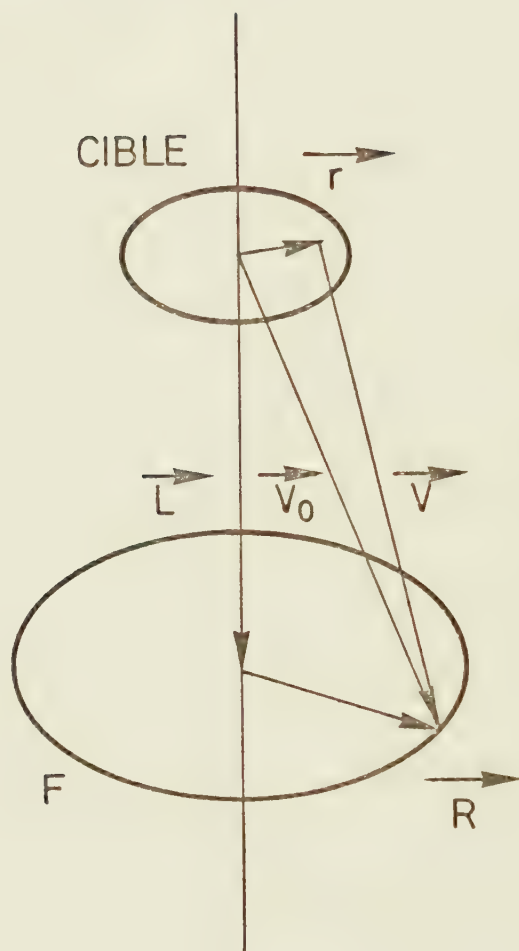


FIG. 62

$$\langle \Delta\theta^2_{\text{proj}} \rangle_{\text{DISC}} = \left(\frac{15}{350} \right)^2 \frac{3,06}{1,52} = 0,370 \cdot 10^{-4} \\ \equiv (6,1 \text{ mrd})^2.$$

Il faut maintenant composer les deux valeurs :

$$\langle \Delta\theta^2_{\text{proj}} \rangle = \left(\frac{55,5}{76,5} \right)^2 0,370 \cdot 10^{-4} + 0,214 \cdot 10^{-4} \\ = 0,309 \cdot 10^{-4} \equiv (5,6 \text{ mrd})^2.$$

b) Calcul de $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\text{ØF}}$.

Comme la cible est à quelques centimètres de E, le volume balayé a une largeur pratiquement égale au diamètre Ø de ce compteur.

Nous utiliserons les notations de la Figure 62. Soient

$$\vec{V}_0 = \vec{L} + \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \vec{L} + \vec{R} - \vec{r}.$$

Calculons

$$\cos \Delta\theta = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{V}}{|\vec{V}_0| |\vec{V}|}.$$

Il vient

$$\cos \Delta\theta = \frac{L^2 + R^2 - \vec{R} \cdot \vec{r}}{\sqrt{L^2 + R^2} \sqrt{L^2 + R^2 + r^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{r}}}.$$

En procédant comme plus haut, on trouve :

$$1 - \frac{\langle \Delta\theta^2 \rangle}{2} = 1 - \frac{\langle r^2 \rangle}{2(R^2 + L^2)} + \frac{1}{2} \langle \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2 + L^2} \right)^2 \rangle \quad \text{ou}$$

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = \frac{R^2 + 2 L^2}{(R^2 + L^2)^2} \frac{\langle r^2 \rangle}{2} = \frac{R^2 + 2 L^2}{(R^2 + L^2)^2} \frac{r^2}{4},$$

soit finalement :

$$\langle \Delta\theta^2_{\text{proj}} \rangle_{\text{ØF}} = \frac{R^2 + 2 L^2}{(R^2 + L^2)^2} \frac{\text{Ø}^2}{32}.$$

Faisons le calcul dans le cas le plus défavorable d'une cible de 4 cm, dont le centre se trouve à la distance

$$L = 18 - \frac{4}{2} = 16 \text{ cm de F} \quad (\theta = 25,1^\circ).$$

On trouve :

$$\frac{7,5^2 + 2 \times 16^2}{(7,5^2 + 16^2)^2} \frac{1}{32} = 1,82 \cdot 10^{-4} \equiv (13,5 \text{ mrd})^2.$$

c) Calcul de $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\Delta X F}$.

L'épaisseur de la cible entraîne également une indétermination sur

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R}{L}.$$

Il vient en différentiant

$$\left(1 + \frac{R^2}{L^2}\right) \Delta\theta = -\frac{R}{L^2} \Delta L \quad \text{d'où}$$

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\Delta X F} = \frac{R^2}{(R^2 + L^2)^2} \langle \Delta L^2 \rangle = \frac{R^2}{(R^2 + L^2)^2} \frac{e^2}{12} \quad \text{et}$$

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\text{proj}} \Delta X F = \frac{R^2}{(R^2 + L^2)^2} \frac{e^2}{24},$$

e étant l'épaisseur de la cible.

Dans le cas le plus défavorable,

$$\frac{7,5^2}{(7,5^2 + 16^2)} \frac{16}{24} = 3,84 \cdot 10^{-4} \equiv (19,6 \text{ mrd})^2.$$

On voit que l'extension du volume sensible joue un rôle important dans l'indétermination angulaire.

d) Calcul de $\langle \Delta\theta^2 \rangle_{MS}$.

La proximité de E et de la cible et le fait que l'épaisseur du compteur soit faible incitent à faire le calcul de diffusion multiple en considérant qu'on a une cible de carbone légèrement plus épaisse. Nous allons donc chercher quel est l'équivalent de 2 mm de scintillateur NE 102 en épaisseur de carbone.

Le fabricant donne le rapport $N_H/N_C = 1,105$ d'où on tire

$$\bar{Z} = 3,375 \quad \text{le nombre atomique moyen.}$$

Par ailleurs on connaît la densité $\rho = 1,032$.

On peut donc calculer l'épaisseur équivalente

$$\frac{\ell}{42,5} = \frac{0,2 \times 1,032}{42,5 \frac{12}{3,375}}$$

soit $\ell = 0,058 \text{ g/cm}^2$ de carbone.

Dans le cas du carbone on peut faire un calcul de diffusion multiple plus précis, en introduisant un terme correctif dans la formule

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle_{\text{proj}} MS = \left(\frac{15}{p\beta}\right)^2 \frac{L}{L_R} (1 + \epsilon)^2,$$

e étant donné en fonction de β et de L/L_R .

Faisons le calcul à 260 MeV avec la cible de 4 cm d'épaisseur

Il vient :

$$\begin{aligned} \langle \Delta\theta^2_{\text{proj}} \rangle_{\text{MS}} &= \left(\frac{15}{347} \right)^2 \frac{8,112 + 0,058}{42,5} (1 - 0,148)^2 \\ &= 262 \cdot 10^{-4} \equiv (16,2 \text{ mrd})^2. \end{aligned}$$

On voit que le terme de diffusion multiple est également très important (et encore 2,5 fois plus à 120 MeV).

e) Pour finir présentons le bilan de tous ces calculs à 260 MeV. On trouve :

Cible cm	$E(\frac{X}{2})$ MeV	$\langle \Delta\theta^2_{\text{proj}} \rangle_{\text{total}} \times 10^4$				
		10°	12°	14°	18°	24°
4	258,2	3,44	3,69	4,18	5,31	8,59
3	259,9	2,68	2,88	3,23	3,98	5,94
2	261,7	1,96	2,12	2,42	2,87	4,03
1	263,5	1,30	1,40	1,61	1,96	2,70

4. Correction de désintégration en vol

Les muons qui sont émis avant le DISC sous un angle supérieur à $0,3^\circ$ ne sont pas admis par l'acceptance géométrique du montage.

Les muons qui sont émis avant le DISC sous un angle inférieur à $0,3^\circ$ possèdent sensiblement la même quantité de mouvement que les pions et se confondent avec les muons en provenance directe de la cible interne. Ils sont éliminés par la résolution en vitesse du compteur Ceronkov.

Nous sommes assurés de n'avoir aucune contamination à la sortie de la cellule du DISC mais la désintégration en vol des pions se poursuit au-delà.

Il va de soi que les μ produits après le DISC peuvent fausser la mesure puisqu'ils ne subissent pas d'interaction forte. Pratiquement, tous les μ créés sur le parcours cellule-E et qui sont comptés par E sont également comptés par F étant données les valeurs de θ_M . De même les pions qui sont comptés par E et se désintègrent sur le parcours E-cible donnent lieu à des événements non-valables.

Il est nécessaire dans les calculs de soustraire, aussi bien du nombre N_0 que du nombre N , la fraction du faisceau qui se désintègre entre la cellule et la cible tout en déclenchant l'électronique. Comme

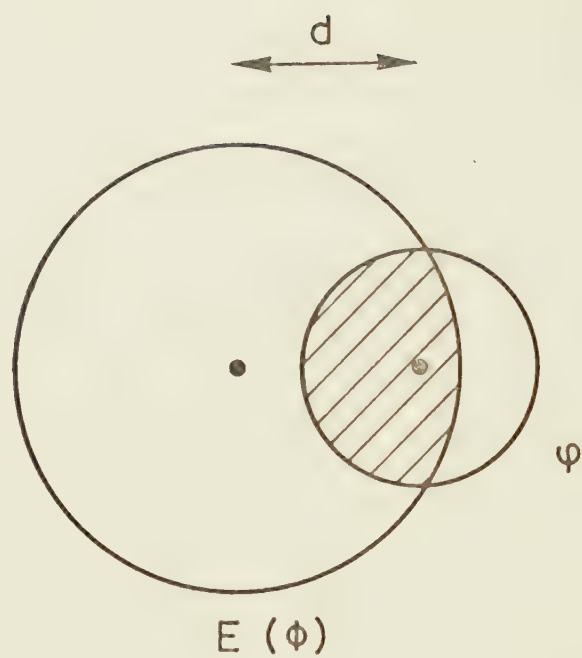


FIG. 63

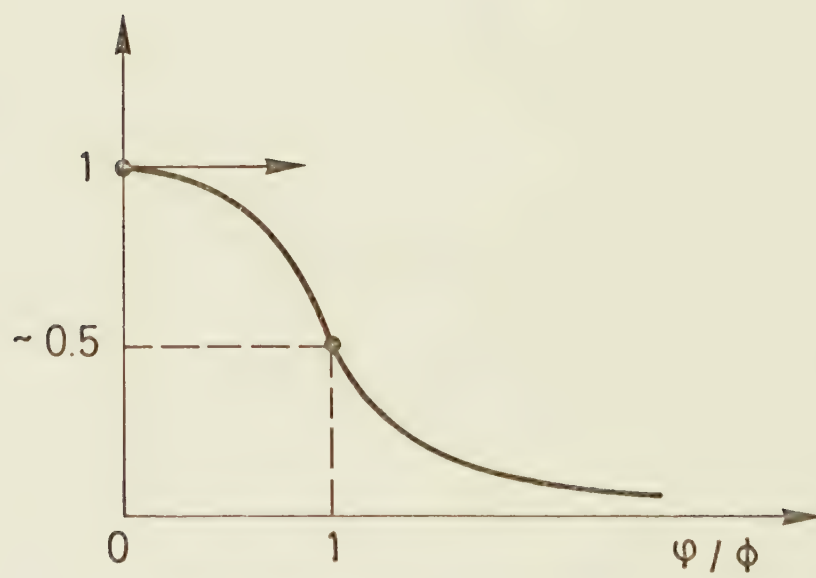


FIG. 64

dans la fraction $\frac{N_0 - N}{N_0}$ le numérateur ne change pas, la correction à faire est simplement

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta N_0}{N_0} . \text{ Il reste à évaluer cette quantité.}$$

Le problème le plus délicat est celui d'estimer le nombre de μ émis entre la cellule du DISC et E, qui traversent effectivement ce compteur.

Nous avons déjà rencontré ce problème lorsque nous avons étudié l'influence de la désintégration en vol sur le taux de comptage du moniteur dans les mesures de sections efficaces différentielles.

Pour les particules voisines de l'axe du faisceau il est facile de calculer la proportion de μ acceptés par le compteur E en fonction de la distance du point d'émission. Si on fait une intégration numérique, on trouve une distance efficace sur l'axe

$$\sim \frac{3}{2} \frac{\varnothing}{2 \operatorname{tg} \theta_M} .$$

En fait toutes les particules ne sont pas voisines de l'axe et il faut essayer d'évaluer l'efficacité de collection en fonction de la distance à l'axe (Figure 63). Des hypothèses simples concernant la distribution des μ (uniforme ou en couronne) permettent de montrer que l'efficacité de collection est une fonction du type "courbe en cloche" (Figure 64).

Pour une distance égale au rayon du compteur, l'efficacité de collection est approximativement réduite à la moitié de sa valeur au centre. Dans ces conditions, il est raisonnable de compter une distance efficace globale

$$\sim \frac{\varnothing}{2 \operatorname{tg} \theta_M} .$$

Des calculs de Monte-Carlo ont été faits qui ont conduit au même résultat.

Ainsi la correction à apporter en valeur relative est égale à la fraction du faisceau qui se désintègre sur une longueur

$$\sim \frac{\varnothing}{2 \operatorname{tg} \theta_M} + 10 \text{ cm} + \frac{\bar{e}}{2} ,$$

puisque'il faut ajouter la distance E - milieu de la cible (10 cm +

$\frac{1}{2}$ épaisseur moyenne de carbone).

Donnons enfin quelques résultats de calcul :

E (MeV)	θ_M°	$1/2 \operatorname{tg} \theta_M$	Correction
120	10,4	2,73	1,11 %
150	8,9	3,18	1,02 %
180	7,9	3,59	0,93 %
200	7,35	3,87	0,85 %
230	6,6	4,32	0,82 %
260	6,0	4,73	0,75 %
280	5,7	4,97	0,715%

5. Exemple de calcul à 260 MeV

Les tableaux suivants donnent les principales étapes du calcul numérique. Pour chaque cible et pour les différentes positions du compteur terminal F, on donne dans les colonnes successives :

θ angle de coupure

$\Delta N/N_0 = (N_0 - N)/N_0$ valeur expérimentale

σ_M section efficace correspondante

CORR 1 : valeur corrigée du terme $KX \frac{\sigma_M^2}{2}$

CORR 2 : valeur corrigée du terme $\frac{X^2}{3}(\dots)$

θ^* angle dans le système C.M.

$\int E +$ = terme élastique intégré + correction en $\langle \Delta \theta^2 \rangle$

$\int C +$ = terme coulombien intégré + correction en $\langle \Delta \theta^2 \rangle$

CORR 3 : valeur de $\sigma_M + \int E - \int C$ à $E \left(\frac{X}{2} \right)$

CORR 4 : valeur de $\sigma_M + \int E - \int C$ à 260 MeV

(en tenant compte de la courbe $\sigma_T = f(E)$ obtenue dans un premier dépouillement).

Pour les sections efficaces différentielles à faible angle, on a pris les coefficients

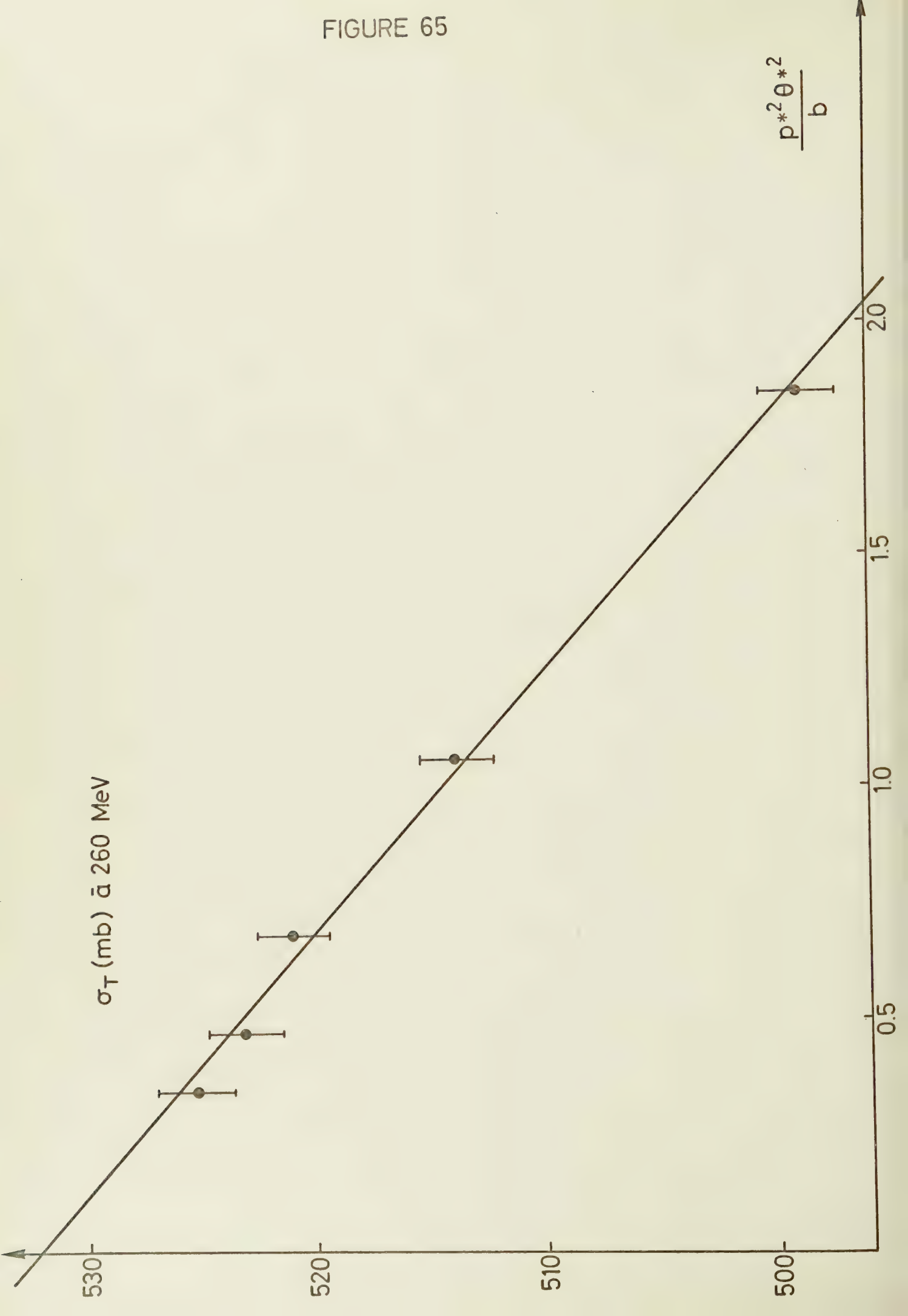
$a = 615$ (mb/Sr) et

$b = 13\,500$ (MeV/c)².

	θ	$\frac{\Delta N}{N_0}$	σ_M	CORR 1	CORR 2	θ^*	$\int_0^{\theta^*} E +$	$\int_{\theta^*}^{\pi} C +$	CORR 3	CORR 4
Cible 4 cm E = 258,2 p [*] = 359,9	10.62	0.1728	424.8	460.8	464.9	10.99	59.9+.1	1.3	523.6	520.7
	12.44	0.1670	410.6	444.3	448.0	12.88	77.4	0.8	524.6	521.7
	15.00	0.1572	386.5	416.4	419.5	15.53	101.9-.2	0.4	520.8	517.9
	18.82	0.1439	353.8	378.8	381.2	19.48	134.9-.4	0.2	515.5	512.6
	25.11	0.1260	309.8	329.0	330.6	25.99	173.4-.7		503.3	500.4
Cible 3 cm E = 259,9 p [*] = 361,6	10.49	0.1299	434.5	462.9	465.9	10.86	58.6+.1	1.3	523.3	523.1
	12.26	0.1256	420.1	446.6	448.8	12.69	75.4	0.8	523.4	523.2
	14.74	0.1175	393.0	416.2	418.0	15.26	99.1-.1	0.4	516.6	516.4
	18.44	0.1073	358.9	378.2	379.6	19.09	131.4-.3	0.2	510.5	510.3
	24.44	.09394	314.2	329.0	329.9	25.30	169.3-.5		498.7	498.5

	θ	$\frac{\Delta N}{N_0}$	σ_M	CORR 1	CORR 2	θ^*	$\int_0^{\theta^*} E +$	$\int_0^{\pi} C +$	CORR 3	CORR 4
Cible 2 cm E = 261,7 p* = 363,4	10.37	.09308	448.3	468.4	469.6	10.73	57.4+.1	1.3	525.8	528.5
	12.10	.08871	427.2	445.5	446.5	12.52	73.7	0.8	519.4	522.1
	14.50	.08530	410.8	427.7	428.6	15.01	96.6-.1	0.5	524.6	527.3
	18.06	.07728	372.2	386.1	386.8	18.69	127.8-.2	0.2	514.2	516.9
	23.81	.06657	320.6	330.9	331.3	24.64	165.2-.4	0.1	496.0	498.7
Cible 1 cm E = 263,5 p* = 365,2	10.24	.04931	457.6	468.1	468.4	10.60	56.1+.1	1.4	523.2	528.8
	11.93	.04727	438.6	448.2	448.5	12.35	72.0	0.9	519.6	525.2
	14.26	.04468	414.6	423.2	423.4	14.76	94.0	0.5	516.9	522.5
	17.70	.04079	378.5	385.7	385.9	18.32	124.3-.1	0.2	509.9	515.5
	23.20	.03518	326.5	331.8	331.9	24.01	161.1-.2	0.1	492.7	498.3

FIGURE 65



On peut constater que les valeurs obtenues ne montrent aucune tendance à varier systématiquement en fonction de l'épaisseur de cible. Ceci est remarquable compte tenu des libertés prises avec ce paramètre.

Dans ces conditions nous convenons de prendre les moyennes des valeurs autour de 10, 12, 14, 18 et 24° et de les affecter aux angles moyens. On obtient alors le tableau suivant :

10,43	525,3 ± 2,01	} ± 1,62
12,18	523,1 ± 0,79	
14,62	521,0 ± 2,46	
18,25	513,8 ± 1,48	
24,13	499,0 ± 0,49	

Il n'y a aucune raison d'accorder plus de confiance à l'une ou à l'autre de ces mesures. Le groupement des valeurs pour un angle donné est une simple question de hasard et on doit prendre une erreur moyenne $\sim 1,6$.

On peut maintenant procéder à l'extrapolation de ces valeurs vers 0° (Figure 65). On obtient :

$$\sigma_T = 532,2 \text{ mb.}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la correction de désintégration en vol qui vaut 0,75 % à 260 MeV. Il vient finalement :

$$\sigma_T = 532,2 + 4,0 = 536,2 \text{ mb.}$$

Il faut encore discuter de la précision du résultat :

Nous avons une erreur sur $\sigma_M \sim 0,6 \% = 2,7 \text{ mb}$ à faible angle. Il en résulte une erreur sur la correction $K \sigma_M^2/2 \sim 1,2 \% = 0,3 \text{ mb}$ (estimations moyennes). Comme ces erreurs sont systématiquement de même sens on obtient $\sim 3 \text{ mb}$ au total. Mais puisqu'il y a 4 cibles on doit compter seulement 1,5 mb d'erreur. Avec les erreurs de second ordre on retrouve bien la valeur empirique de 1,6 mb admise.

Une autre erreur importante, mais qui n'apparaît pas dans les calculs, est l'erreur sur

$$\int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_E d\Omega \quad \text{qui est pratiquement égale en valeur relative à}$$

$$\frac{\Delta a}{a} \sim 4 \% \quad \text{soit } 2,4 \text{ mb à faible angle.}$$

Compte tenu de la faible erreur sur b et sur la correction de désintégration, on arrive à

3 mb d'erreur totale.

Il ne faut pas oublier que nous avons négligé l'erreur en $\langle \Delta\theta^2 \rangle$ sur σ_M , dont nous ne connaissons pas le sens et qui atteint peut-être 1mb.

Enfin il faut se souvenir de deux écueils importants :

- l'erreur d'extrapolation peut être non négligeable si

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_I^\pi \neq \text{cte} \quad \text{à faible angle.}$$

- le traitement ignore totalement les effets de l'interférence C.N.

Pour toutes ces raisons, il nous semble raisonnable d'admettre une erreur relative de l'ordre de 1 % sur la valeur de section efficace totale.

Ainsi à 260 MeV, nous adoptons la valeur

$$\sigma_T = 536 \pm 6 \text{ mb.}$$

Remarques :

Nous avons négligé quelques sources d'erreur :

- Les protons projetés sont en grande partie stoppés dans la cible et fournissent une contribution faible $< 1 \text{ mb}$ qu'on peut évaluer expérimentalement en disposant un absorbant contre le détecteur terminal.

- Des photons peuvent être détectés par effet Compton ou matérialisation. En admettant que toute la contribution inélastique donne des photons, ce qui est faux, on aurait $\sim 300 \text{ mb}$ de production isotrope mais il faut compter avec un angle solide relatif $\frac{2 \pi (1 - \cos \theta)}{4 \pi} \sim \frac{1}{100}$ ce qui rend l'effet négligeable. Le processus $\pi^- \rightarrow \pi^0 \rightarrow 2 \gamma$ est plus dangereux si on suppose que l'émission des photons a lieu vers l'avant, mais la section efficace est $\sim 50 \text{ mb}$ et la contribution résultante est inférieure à 1 mb étant donnée la faible efficacité de détection.

- La double diffusion nucléaire peut également jouer un rôle pour les cibles épaisses (effet en sens inverse des précédents).

En tout état de cause ces erreurs sont largement incluses dans la barre de $\pm 6 \text{ mb}$ proposée.

C. Résultats des mesures

1. Les valeurs obtenues ainsi que les approximations admises sont données dans le Tableau VII et sur les courbes VIII. Nous avons déterminé σ_T aux énergies de réglage déjà utilisées pour nos mesures de sections efficaces différentielles et également (dans de moins bonnes conditions statistiques) à 93 et 108 MeV, afin de rejoindre les valeurs à 69,5 et 87,5 MeV.

Ces dernières ont été calculées par l'analyse en potentiel optique des données de Edelstein et al⁽⁴⁸⁾. Les résultats sont en bon accord. A plus haute énergie nos mesures s'adaptent de façon satisfaisante avec les valeurs de Ignatenko et al⁽³⁾ et de Crozon et al⁽⁵⁷⁾.

La connaissance des sections efficaces différentielles élastiques entre 120 et 280 MeV nous a permis de calculer les sections efficaces totales élastiques σ_E , puis les sections efficaces totales inélastiques par différence

$$\sigma_I = \sigma_T - \sigma_E. \text{ Le rapport}$$

$\sigma_E/\sigma_I \sim 0,6$ indique que le noyau n'est ni totalement absorbant, ni totalement réfléchissant pour les pions incidents.[†]

2. Le fait le plus surprenant qui ressort de nos mesures est la position du maximum à

145 ± 8 MeV, c'est-à-dire très en dessous de la résonance pion-nucléon à 195 MeV. On peut tenter d'expliquer cet écart de plusieurs manières :

- Une hypothèse peut-être simpliste consiste à supposer que le noyau recule de façon cohérente. On peut alors écrire l'invariant de Lorentz :

$$(E_C + m_\pi + m_A)^2 - p_\pi^2 = (m_\pi + m_A)^2 + 2 m_A E_C = (m_A - m_N + m_N^*)^2,$$

soit

$$E_C = (m_N^* - m_N) \left(1 + \frac{m_N^* - m_N}{2 m_A}\right) - m_\pi \left(1 + \frac{m_\pi}{2 m_A}\right),$$

avec

$$m_N^* = 1240, \quad m_N = 940,$$

$$m_A = 11180, \quad m_\pi = 140. \text{ On trouve}$$

$$E_C \sim 160 \text{ MeV encore trop haut.}$$

† On peut écrire en fonction des déphasages

$$\sigma_E = \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) |\eta_\ell - 1|^2 \quad \text{et}$$

$$\sigma_I = \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) [1 - |\eta_\ell|^2].$$

Pour un noyau totalement absorbant

$$|\eta_\ell| = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma_E/\sigma_I = 1.$$

Pour un noyau totalement réfléchissant

$$|\eta_\ell| = 1 \quad \text{d'où} \quad \sigma_E/\sigma_I = \infty.$$

- On peut supposer qu'il y a superposition d'ondes p et s, ce qui donne des amplitudes de la forme

$$f = \frac{\gamma}{E - E^* + i \frac{\Gamma}{2}} + A, \text{ où}$$

E^* est l'énergie de la résonance et
 Γ sa largeur ~ 120 MeV.

On trouve que

$$f^2 = \gamma \frac{\gamma + 2 R_e A(E - E^*) - \text{Im } A \cdot \Gamma}{(E - E^*)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} + |A|^2$$

devient maximum pour

$$E = E_M \quad \text{telle que}$$

$$(E_M - E^*)(\gamma - \text{Im } A \cdot \Gamma) = R_e A \left[\frac{\Gamma^2}{4} - (E_M - E^*)^2 \right]$$

$$\neq R_e A \cdot \frac{\Gamma^2}{4} \quad \text{qui donne}$$

$$f_M^2 = \gamma \cdot \frac{R_e A}{E_M - E^*} + |A|^2$$

$$\neq \frac{\gamma^2}{\frac{\Gamma^2}{4}} \quad \text{si } |A| \ll f_M.$$

Ainsi on peut expliquer le déplacement observable dans la résonance π - nucléon.

$$E_M - E^* = 10 \text{ MeV} \quad \text{en admettant un rapport}$$

$$\frac{R_e A}{\gamma} \sim \frac{E_M - E^*}{\frac{\Gamma^2}{4}} \quad \text{soit}$$

$$\frac{R_e A}{f_M} \sim \frac{E_M - E^*}{\frac{\Gamma}{2}} = \frac{10}{60} \neq 17 \ \%.$$

- Enfin il est possible que le maximum de σ_T ne corresponde nullement à la résonance pion-nucléon, l'interaction pion-noyau étant beaucoup plus complexe. Mais alors se pose le problème d'une interprétation théorique nouvelle.

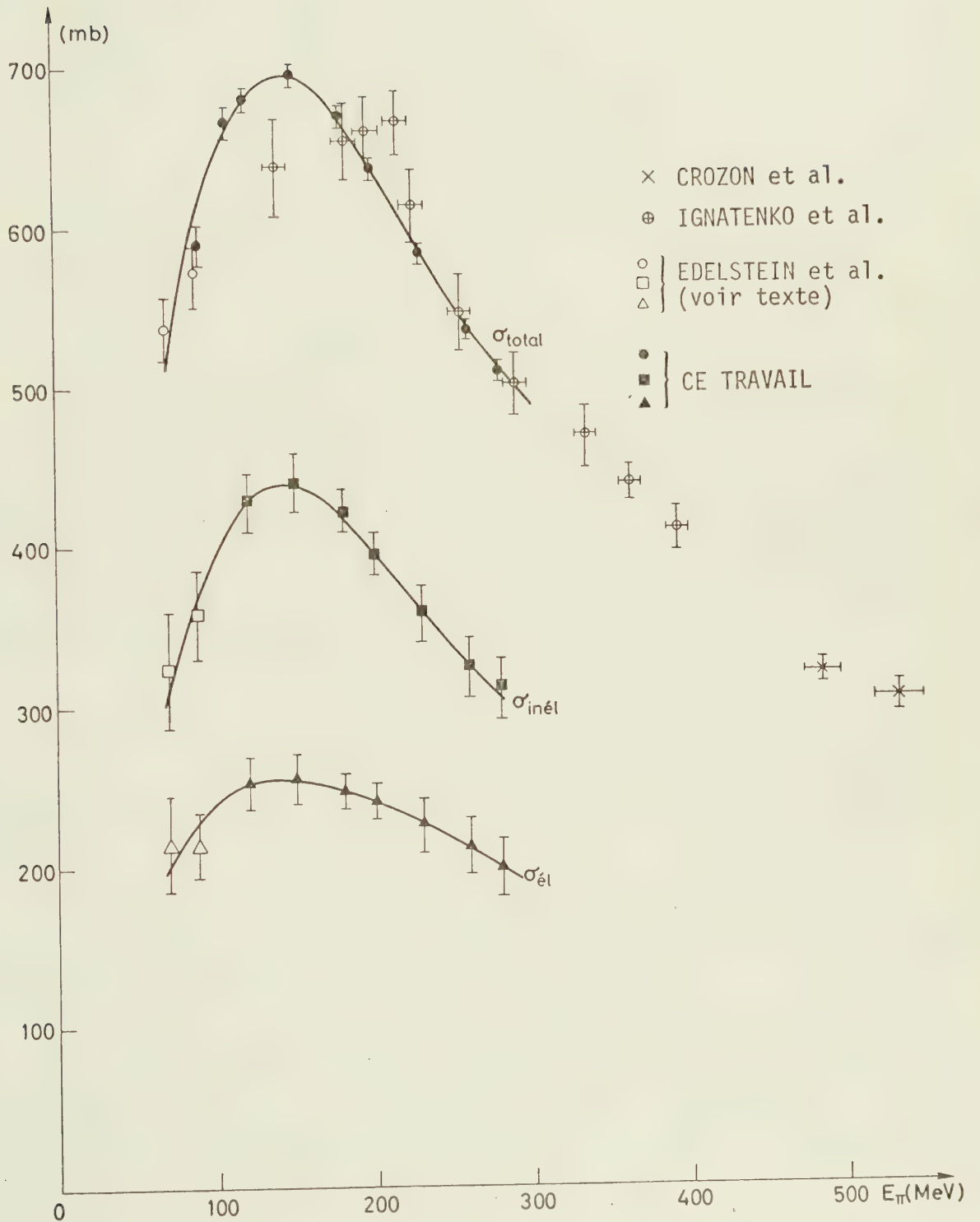
RESULTATS VII

Sections efficaces totales, élastiques et inélastiques

Energie en MeV	σ_{total} en mb	$\sigma_{\text{él}}$ en mb	$\sigma_{\text{inél}}$ en mb	$\sigma_{\text{él}}/\sigma_{\text{inél}}$
69.5	537 ± 20	214 ± 30	323 ± 36	0.663 ± 0.119
87.5	571 ± 20	213 ± 20	358 ± 28	0.595 ± 0.073
90	590 ± 12			
108	666 ± 10			
120	681 ± 7	252 ± 16	429 ± 18	0.587 ± 0.045
150	696 ± 7	255 ± 16	441 ± 18	0.578 ± 0.043
180	670 ± 7	247 ± 11	423 ± 13	0.584 ± 0.032
200	637 ± 7	241 ± 11	396 ± 13	0.609 ± 0.034
230	584 ± 6	225 ± 17	359 ± 18	0.626 ± 0.053
260	536 ± 6	212 ± 18	324 ± 19	0.654 ± 0.068
280	510 ± 6	199 ± 18	311 ± 19	0.640 ± 0.070

RESULTATS VIII

Sections efficaces totales, élastiques et inélastiques



3. Nous avons déjà montré que le fait d'observer une droite dans l'extrapolation

$\sigma_T = f(\theta^2)$ à faible angle, correspond à une valeur constante de la section efficace différentielle à zéro degré intégrée sur tous les niveaux inélastiques

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{I_0}^{\pi} = \int_0^{\infty} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}\right)_{I_0} dE.$$

Dans le cas de nos graphiques on peut calculer

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{I_0}^{\pi} = - \text{pente} \times \frac{E^2 \theta^2}{\pi \theta^2}.$$

Par exemple à 260 MeV

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{I_0}^{\pi} = 17,75 \frac{(361,67)^2}{13500 \pi} = 54,7 \text{ mb.}$$

L'ensemble des résultats est donné par le Tableau IX et la courbe X.

Les fortes valeurs obtenues à faible énergie correspondent à une distribution fortement piquée vers l'avant. Le minimum de 16 mb à 155 MeV fait penser à une distribution beaucoup plus uniforme ou à une absorption importante. On observe ensuite une remontée plus lente, dans une zone où une étude particulière de la diffusion inélastique a montré que les pions étaient réémis avec un moment transversal sensiblement égal au moment de Fermi.

On s'attendrait à ce que $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{I_0}^{\pi}$ soit une fonction régulièrement croissante de l'énergie, correspondant à une distribution de plus en plus reserrée vers l'avant. Le creux observé est un accident local dû au passage par la résonance.

La formation d'un état intermédiaire N^* (ou d'un état résonnant π -noyau) dans lequel le pion perd le souvenir de sa direction initiale explique une réémission isotrope et/ou une absorption plus forte.

A 260 MeV le pion possède une longueur d'onde assez faible, subit plusieurs diffusions dans le noyau et ressort avec un moment transversal de l'ordre du moment des nucléons dans le noyau. Il est regrettable que la mesure de la contribution inélastique lointaine n'ait pas été faite à d'autres énergies pour compléter cette étude.

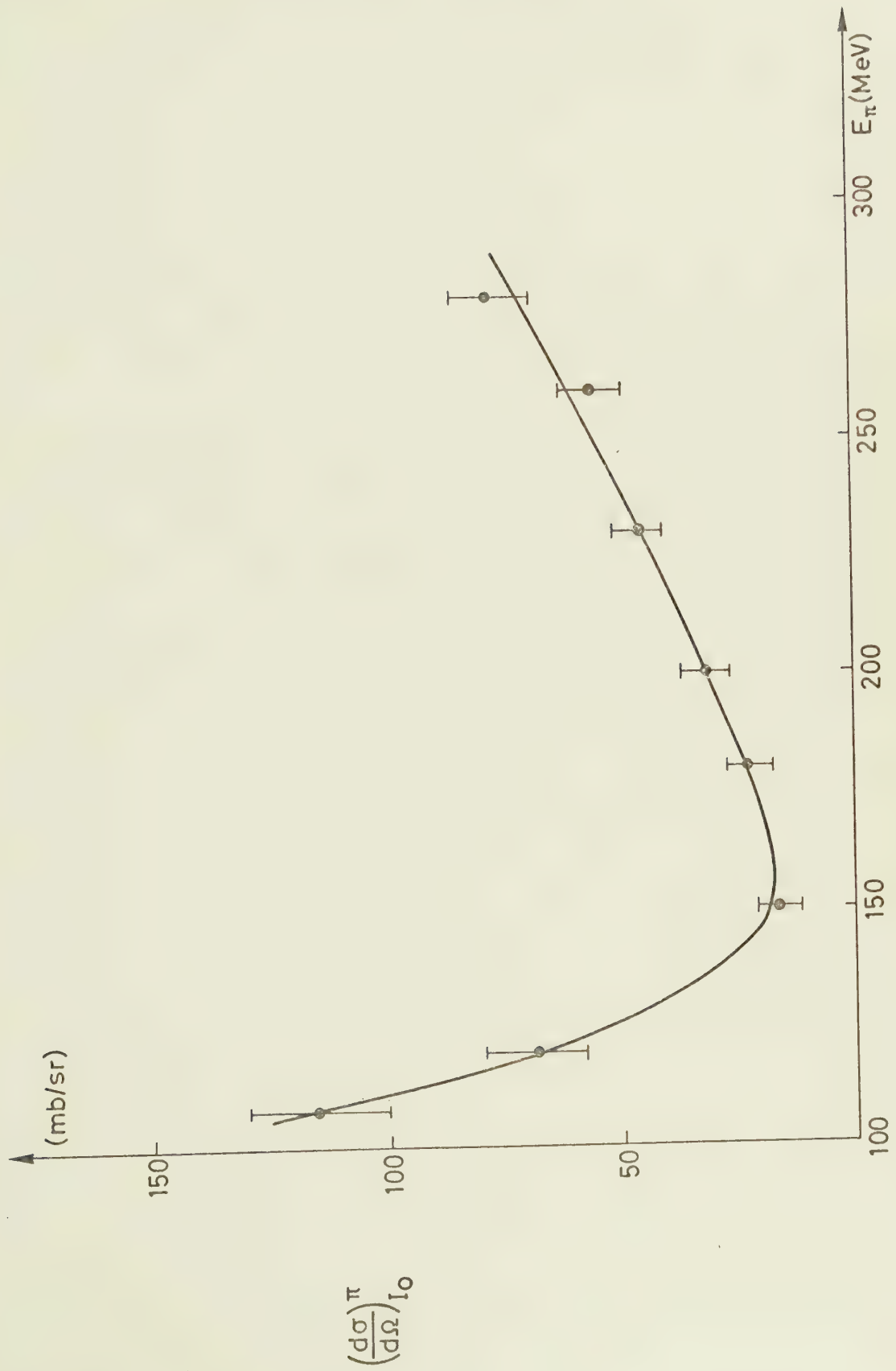
RESULTATS IX

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{I_0}^{\pi} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}\right)_{I_0} dE$$

Energie en MeV	$(d\sigma/d\Omega)_{I_0}^{\pi}$ en mb/sr
108	115.2 ± 14.4
120	68.6 ± 10.6
150	16.0 ± 4.8
180	22.2 ± 4.8
200	31.6 ± 5.2
230	46.0 ± 5.2
260	54.7 ± 5.4
280	77.0 ± 8.4

RESULTATS X

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{I_0}^{\pi} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}\right)_{I_0} dE$$



TROISIEME PARTIE

ANALYSE ET DISCUSSION DES RESULTATS
DE DIFFUSION ELASTIQUE

C H A P I T R E VI

THEORIE DU POTENTIEL OPTIQUE POUR L'INTERACTION PION-NOYAU

A. Equations intégrales de la diffusion (rappel)

1. On cherche la solution générale de l'équation de Schrödinger avec potentiel

$$[-H_0 + E] \psi(\vec{r}) = V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad \text{ou}$$

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}).$$

On connaît la solution générale de l'équation de Schrödinger sans potentiel

$$[\nabla^2 + k^2] \phi(\vec{r}) = 0 \quad \text{qui est}$$

$\phi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}$ et il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète.

Définissons tout d'abord la fonction de Green satisfaisant la condition

$$[\nabla^2 + k^2] G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

On peut alors construire la solution particulière

$$F(\vec{r}) = \int G_0(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \text{telle que}$$

$$[\nabla^2 + k^2] F(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}).$$

Finalement on obtient la solution générale

$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + F(\vec{r})$, où $F(\vec{r})$ fait intervenir la fonction de Green qui s'écrit sous sa forme la plus générale

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{a e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} + b e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

avec $a + b = 1$, le choix de ces constantes dépendant des conditions aux limites imposées.

Nous nous proposons plus particulièrement d'étudier une fonction d'onde sortante de la forme

$\psi^+(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec{k}\vec{r}} + F^+(\vec{r})$, où $F^+(\vec{r})$ possède la forme asymptotique

$$F^+(\vec{r} \rightarrow \infty) = (2\pi)^{-3/2} \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta).$$

Dans ces conditions il faut prendre

$$G_0^+(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{et il vient}$$

$$F^+(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

Si on suppose un potentiel de portée limitée

$$V(\vec{r}') \neq 0 \iff |\vec{r}'| < a, \quad \text{et pour}$$

$|\vec{r}| \gg a$, on peut développer

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} \approx r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}.$$

On trouve alors

$$F^+(\vec{r} \rightarrow \infty) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}') d\vec{r}',$$

avec $\vec{k}' = k \frac{\vec{r}}{r}$ (vecteur d'onde après diffusion).

On voit que

$$f(\theta) = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}) d\vec{r},$$

ce qui conduit bien à l'approximation de Born (Voir Appendice V)

$$f(\theta)_{\text{BA}} = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r},$$

et dans le cas de symétrie sphérique où

$$V(\vec{r}) \equiv V(r), \quad \text{en posant} \quad \vec{q} = \vec{k}' - \vec{k},$$

$$f(\theta)_{\text{BA}} = - \int \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \left[\frac{\sin qr}{qr} \right] r^2 dr.$$

2. Avant d'aller plus loin dans le formalisme, il est nécessaire d'étudier quelque peu la fonction de Green déjà définie

$$G_0^+(\vec{r}', \vec{r}'') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}''|}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|}.$$

Faisons d'abord une transformation de Fourier

$$G_0^+(\vec{k}', \vec{k}'') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} \frac{e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}''|}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r}''} d\vec{r}' d\vec{r}''$$

et posons

$$\vec{r}' = \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}, \quad \vec{r}'' = \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}. \quad \text{Il vient}$$

$$G_0^+(\vec{k}', \vec{k}'') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}'' - \vec{k}') \cdot \vec{R}} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} e^{-i(\vec{k}'' + \vec{k}') \cdot \frac{\vec{\rho}}{2}} d\vec{R} d\vec{\rho}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad G_0^+(\vec{k}', \vec{k}'') &= -\frac{1}{4\pi} \delta(\vec{k}' - \vec{k}'') \int \frac{e^{ik\rho}}{\rho} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{\rho}} d\vec{\rho} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \delta(\vec{k}' - \vec{k}'') \int [e^{i(k+k')\rho} - e^{i(k-k')\rho}] d\rho, \end{aligned}$$

et comme

$$\int_0^\infty e^{i(k \pm k')\rho} d\rho = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{i(k \pm k' + i\epsilon)\rho} d\rho = \frac{i}{k \pm k'}, \text{ finalement}$$

$$G_0^+(\vec{k}', \vec{k}'') = \frac{\delta(\vec{k}' - \vec{k}'')}{k^2 - k'^2} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta(\vec{k}' - \vec{k}'')}{E - E_{k'}}.$$

Faisons maintenant la transformation inverse

$$G_0^+(\vec{r}', \vec{r}'') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} \frac{\delta(\vec{k}' - \vec{k}'')}{k^2 - k'^2} e^{-i\vec{k}'' \cdot \vec{r}''} d\vec{k}', d\vec{k}''.$$

Il vient

$$\begin{aligned} G_0^+(\vec{r}', \vec{r}'') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'')}}{k^2 - k'^2} d\vec{k}', \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'')}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} d\vec{k}', \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'')}}{E - E_{k'} + i\epsilon} d\vec{k}'. \end{aligned}$$

3. Nous définissons maintenant la matrice T, ou opérateur de transition, la grandeur

$$T(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{4\pi\hbar^2}{2m} f(\theta), \text{ soit}$$

$$T(\vec{k}', \vec{k}) = (2\pi)^{+3/2} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}} V(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}) d\vec{r},$$

et son approximation de Born, la matrice V

$$V(\vec{k}', \vec{k}) = T(\vec{k}', \vec{k})_{BA} = \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}.$$

Partant de la relation

$$\psi^+(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \int G_0^+(\vec{r}, \vec{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}') d\vec{r}',$$

on montre facilement que

$$\begin{aligned} T(\vec{k}', \vec{k}) &= V(\vec{k}', \vec{k}) \\ &+ \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^{+3/2} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}} V(\vec{r}) G_0^+(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}', \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} T(\vec{k}', \vec{k}) &= V(\vec{k}', \vec{k}) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}} V(\vec{r}) \frac{e^{i\vec{k}''(\vec{r}-\vec{r}')}}{E - E_{k''} + i\epsilon} V(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' d\vec{k}'' \end{aligned}$$

$$\text{ou encore } T(\vec{k}', \vec{k}) = V(\vec{k}', \vec{k}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{V(\vec{k}', \vec{k}'') T(\vec{k}'', \vec{k})}{E - E_{k''} + i\epsilon} d\vec{k}''.$$

Cette dernière relation exprime l'amplitude de diffusion en fonction de l'interaction et évite le calcul intermédiaire de la fonction d'onde. Nous allons maintenant chercher à l'obtenir dans un autre formalisme plus commode.

B. Formalisme de Lippmann-Schwinger

1. Nous commencerons par rappeler sommairement les notations de Dirac avec lesquelles on écrit

$$\begin{aligned} \text{une fonction d'état} \quad \psi(x) &= \langle x | \psi \rangle & \text{et} \\ \text{la fonction conjuguée} \quad \psi^*(x) &= \langle \psi | x \rangle, \end{aligned}$$

ce qui donne la condition de normalisation

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx = 1.$$

Un opérateur A représente un observable si

- ses états propres définis par

$$A|n\rangle = a(n)|n\rangle \quad \text{forment un ensemble complet, c'est-à-dire qui}$$

permet d'écrire

$$\langle x | \psi \rangle = \int \langle x | n \rangle \langle n | \psi \rangle dn.$$

La probabilité de mesurer la valeur propre $a(n)$ pour l'état $\langle x | \psi \rangle$ du système est égale au carré du coefficient

$$\langle n | \psi \rangle = \int \langle n | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx.$$

- quels que soient $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ on a

$$\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle^*.$$
 On en déduit que l'ensemble des états

propres est orthonormal c'est-à-dire que

$$\langle n' | n'' \rangle = \int \langle n' | x \rangle \langle x | n'' \rangle dx = \delta_{n', n''}.$$

L'action d'un opérateur sur une fonction d'état est une autre fonction d'état qu'on peut écrire

$$\langle x | A | \psi \rangle = \int \langle x | A | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle dx',$$

en faisant apparaître les éléments de matrice $\langle x | A | x' \rangle$ dont la connaissance équivaut à celle de l'opérateur.

2. Reprenons l'étude de la fonction de Green en posant

$$G_0^+(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle \vec{r} | G_0^+ | \vec{r}' \rangle.$$
 On a

$$\begin{aligned} [-H_0 + E] G_0^+(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{\hbar^2}{2m} [\nabla^2 + k^2] G_0^+(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \delta(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle \vec{r} | I | \vec{r}' \rangle \end{aligned}$$

$$\text{soit } [-H_0 + E] \langle \vec{r} | G_0^+ | \vec{r}' \rangle = \langle \vec{r} | I | \vec{r}' \rangle,$$

et sous forme d'opérateurs

$$[-H_0 + E] G_0^+ = I \quad (\text{opérateur identité}).$$

On connaît les états propres de l'opérateur H_0

$$H_0 |\vec{k}\rangle = E_k |\vec{k}\rangle \quad \text{avec}$$

$$\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec{k}\vec{r}}.$$

Calculons tout d'abord l'élément de matrice

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} | (E - H_0) G_0^+ | \vec{k}' \rangle &= \\ \int \langle \vec{k} | (E - H_0) | \vec{k}'' \rangle \langle \vec{k}'' | G_0^+ | \vec{k}' \rangle d\vec{k}'' &= \\ \int (E - E_{k''}) \langle \vec{k} | \vec{k}'' \rangle \langle \vec{k}'' | G_0^+ | \vec{k}' \rangle d\vec{k}'' &= \\ \int (E - E_{k''}) \delta(\vec{k} - \vec{k}'') \langle \vec{k}'' | G_0^+ | \vec{k}' \rangle d\vec{k}'' &= \\ (E - E_k) \langle \vec{k} | G_0^+ | \vec{k}' \rangle &= \end{aligned}$$

$$\langle \vec{k} | I | \vec{k}' \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad \text{d'où}$$

$$\langle \vec{k} | G_0^+ | \vec{k}' \rangle = \frac{\delta(\vec{k} - \vec{k}')}{E - E_k}.$$

Calculons maintenant l'élément de matrice

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | G_0^+ | \vec{r}' \rangle &= \int \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | G_0^+ | \vec{k}' \rangle \langle \vec{k}' | \vec{r}' \rangle d\vec{k} d\vec{k}' \\ &= \int \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \frac{\delta(\vec{k} - \vec{k}')}{E - E_k} \langle \vec{k}' | \vec{r}' \rangle d\vec{k} d\vec{k}' \\ &= \int \frac{\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}' \rangle}{E - E_k} d\vec{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')}}{E - E_k} d\vec{k}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les résultats déjà obtenus. On voit qu'on peut représenter l'opérateur par le symbole

$$G_0^+ = \int \frac{|\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|}{E - E_k} d\vec{k} \quad (\text{projecteur}).$$

3. Partons de la relation

$$\langle \vec{r} | \psi^+ \rangle = \langle \vec{r} | \vec{k}_1 \rangle + \int \langle \vec{r} | G_0^+ | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | V | \psi^+ \rangle d\vec{r}'$$

qu'on multiplie à gauche par $\langle \vec{k}_f | V | \vec{r} \rangle d\vec{r}$ et intégrons. Il vient

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_f | V | \psi^+ \rangle &= \langle \vec{k}_f | V | \vec{k}_1 \rangle \\ &+ \int \langle \vec{k}_f | V | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | G_0^+ | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | V | \psi^+ \rangle d\vec{r} d\vec{r}' \\ &= \langle \vec{k}_f | V | \vec{k}_1 \rangle + \langle \vec{k}_f | V G_0^+ V | \psi^+ \rangle \\ &= \langle \vec{k}_f | V | \vec{k}_1 \rangle + \int \frac{\langle \vec{k}_f | V | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | V | \psi^+ \rangle}{E - E_k} d\vec{k}. \end{aligned}$$

Si on définit l'élément de matrice

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_f | T | \vec{k}_1 \rangle &= (2\pi)^{-3} T(\vec{k}_f, \vec{k}_1) \\ &= \int \langle \vec{k}_f | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | V | \psi^+ \rangle d\vec{r} \\ &= \langle \vec{k}_f | V | \psi^+ \rangle, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\langle \vec{k}_f | T | \vec{k}_1 \rangle = \langle \vec{k}_f | V | \vec{k}_1 \rangle + \int \frac{\langle \vec{k}_f | V | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | T | \vec{k}_1 \rangle}{E - E_k} d\vec{k}, \text{ soit}$$

$$\langle \vec{k}_f | T | \vec{k}_i \rangle = \langle \vec{k}_f | V | \vec{k}_i \rangle + \langle \vec{k}_f | V G_0^+ T | \vec{k}_i \rangle ,$$

d'où la relation entre opérateurs

$$T = V + V G_0^+ T , \quad \text{équivalente à la relation déjà obtenue plus haut.}$$

L'intérêt du formalisme de Lippmann-Schwinger en termes d'opérateurs est évident. Partons par exemple de

$$|\psi^+\rangle = |\vec{k}_i\rangle + G_0^+ V |\psi^+\rangle \quad \text{avec}$$

$$G_0^+ = (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \quad \text{et posons}$$

$$|\psi^+\rangle = \Omega^+ |\vec{k}_i\rangle . \quad \text{Il vient}$$

$$\Omega^+ = 1 + G_0^+ V \Omega^+ = 1 + G^+ V \quad \text{avec}$$

$$G^+ = (E - H_0 - V + i\varepsilon)^{-1} .$$

Comme on a défini

$$\langle \vec{k}_f | T | \vec{k}_i \rangle = \langle \vec{k}_f | V | \psi^+ \rangle = \langle \vec{k}_f | V \Omega^+ | \vec{k}_i \rangle ,$$

$$T \equiv V \Omega^+ \quad \text{et on peut écrire}$$

$$T = V + V G_0^+ T = V + V G^+ V .$$

L'opérateur G^+ n'est généralement pas connu et on préfère utiliser l'opérateur G_0^+ en faisant le développement (Liouville-Neumann) .

$$T = V + V G_0^+ V + V G_0^+ V G_0^+ V + \dots$$

L'intérêt de la matrice T est qu'elle établit une correspondance directe entre les ondes planes initiale et finale, ses éléments étant directement proportionnels aux amplitudes de diffusion $f(\theta)$.

C. Dérivation du potentiel optique

1. On cherche à représenter la diffusion d'un pion par un noyau, système complexe à plusieurs corps, en se ramenant formellement au problème de la diffusion par un centre unique grâce à l'emploi d'une fonction potentiel convenable (ceci n'est valable que pour la diffusion élastique où il n'y a pas de perte d'énergie). Le plus classique exemple d'une telle technique est l'usage d'un indice de réfraction pour étudier l'effet d'un milieu à grand nombre de particules sur le passage de la

lumière. Certaines analogies entre ces deux problèmes ont conduit à l'expression "potentiel optique".

On peut définir un hamiltonien

$$H_{N\pi} = H_N + H_\pi \quad \text{avec}$$

H_N , hamiltonien du noyau, contenant toutes les interactions nucléaires (dans le cas de la diffusion nucléon-noyau, il faudrait tenir compte de ce que le nucléon projectile est indiscernable des nucléons cibles), tel que $H_N |n\rangle = E_n |n\rangle$ et

H_π , hamiltonien du pion libre tel que $H_\pi |\vec{k}\rangle = E_k |\vec{k}\rangle$.

On suppose que l'interaction pion-noyau peut être décrite par un potentiel V égal à la somme des potentiels individuels pion-nucléon V_α :

$$V = \sum_{\alpha=1}^A V_\alpha.$$

La résolution de l'équation d'onde

$$(H_{N\pi} + V) |\psi\rangle = (E_n + E_k) |\psi\rangle$$

est alors équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$T = V + V G_0^+ T$$

Si on définit une matrice de diffusion de la particule incidente sur le nucléon α lié :

$$t_\alpha = v_\alpha + v_\alpha G_\alpha^+ t_\alpha, \text{ on peut calculer}$$

$$v_\alpha = t_\alpha - t_\alpha G_\alpha^+ t_\alpha + t_\alpha G_\alpha^+ t_\alpha G_\alpha^+ t_\alpha - \dots$$

et porter dans l'expression

$$T = V + V G_0^+ V + V G_0^+ V G_0^+ V + \dots$$

On trouve le développement

$$T = \sum_\alpha t_\alpha + \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} t_\alpha G_\alpha^+ t_\beta + \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{\gamma \neq \beta} t_\alpha G_\alpha^+ t_\beta G_\beta^+ t_\gamma + \dots$$

où les diffusions successives sur un même nucléon sont exclues, ce qui est en accord avec la définition de t_α qui contient toutes les interactions successives sur un même nucléon.

Nous nous proposons de calculer l'amplitude de diffusion élastique, dans laquelle le noyau reste dans son état fondamental, représenté

par le symbole 0. Posons

$$\langle \vec{k}_f | T | \vec{k}_i \rangle = \langle \vec{k}_f | \langle 0 | T | 0 \rangle | \vec{k}_i \rangle$$

soit $T = \langle 0 | T | 0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ n' n''}} \langle 0 | t_{\alpha} | n' \rangle \langle n' | G_0^+ | n'' \rangle \langle n'' | t_{\beta} | 0 \rangle + \dots$$

avec $G_0^+ = \sum_{n, k} \frac{|\vec{k}\rangle \langle n| \langle n| \langle \vec{k}|}{E - E_n - E_k + i\epsilon}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle n' | G_0^+ | n'' \rangle &= \sum_{n, k} \frac{|\vec{k}\rangle \delta_{nn'} \delta_{nn''} \langle \vec{k}|}{E - E_n - E_k + i\epsilon} \\ &= \delta_{n' n''} \sum_k \frac{|\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|}{E - E_n - E_k + i\epsilon} \end{aligned}$$

La matrice qui représente G_0^+ sur les états propres du noyau est diagonale et on a

$$\langle n | G_0^+ | n \rangle = \sum_k \frac{|\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|}{E - E_n - E_k + i\epsilon} = G_0^+(E - E_n),$$

G_0^+ étant l'opérateur normal du problème à deux corps. Finalement, on peut écrire

$$T = \sum_{\alpha} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle + \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ n}} \langle 0 | t_{\alpha} | n \rangle G_0^+(E - E_n) \langle n | t_{\beta} | 0 \rangle + \dots$$

Nous allons maintenant poursuivre le calcul en faisant plusieurs approximations successives.

Hypothèse de diffusion cohérente

La probabilité d'une excitation puis d'une désexcitation donnant à nouveau l'état fondamental est faible. Par ailleurs un tel processus de diffusion incohérente (la longueur d'onde n'est pas conservée dans l'interaction) donne une section efficace qui s'obtient par addition quadratique des amplitudes, donc négligeable devant la section efficace de diffusion cohérente où il y a addition directe des amplitudes. On pose donc

$$\langle 0 | t_{\alpha} | n \rangle = 0 \quad \text{si } n \neq 0, \text{ ce qui donne}$$

$$T = \sum_{\alpha} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle + \sum_{\alpha \neq \beta} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle G_0^+(E) \langle 0 | t_{\beta} | 0 \rangle + \dots$$

Hypothèse du grand nombre de nucléons

On suppose un grand nombre de nucléons, ce qui permet de remplacer les $A(A-1)$ termes de $\sum_{\alpha \neq \beta}$ par les A^2 termes de $\sum_{\alpha \beta}$. On peut donc écrire

$$T = \sum_{\alpha} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle + \sum_{\alpha \beta} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle G_0^+(E) \langle 0 | t_{\beta} | 0 \rangle + \dots$$

et identifier avec

$$T = V + V G_0^+ V + \dots$$

d'où l'expression du potentiel optique

$$V = \sum_{\alpha} \langle 0 | t_{\alpha} | 0 \rangle.$$

Nous sommes ramenés à un problème à deux corps où la fonction d'onde du pion satisfait à l'équation d'onde

$$(-H_{\pi} + E) |\psi\rangle = V |\psi\rangle.$$

Nous allons maintenant calculer l'élément de matrice $\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle$ en introduisant des projecteurs pour les nucléons. Il vient

$$- \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | \langle \vec{k}' | t_{\alpha} | \vec{k} \rangle | 0 \rangle =$$

$$\sum_{\alpha} \int \prod_i d\vec{k}'_i d\vec{k}_i \langle 0 | \vec{k}'_1 \dots \vec{k}'_A \rangle \langle \vec{k}'_1 \dots \vec{k}'_A | \langle \vec{k}' | t_{\alpha} | \vec{k} \rangle | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_A \rangle \langle \vec{k}_1 \dots \vec{k}_A | 0 \rangle,$$

$$- \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \sum_{\alpha} \int d\vec{k}'_{\alpha} d\vec{k}_{\alpha} \langle \vec{k}'_{\alpha} | \langle \vec{k}' | t_{\alpha} | \vec{k} \rangle | \vec{k}_{\alpha} \rangle$$

$$\cdot \int \prod_{i \neq \alpha} d\vec{k}'_i d\vec{k}_i \langle \vec{k}'_1 \dots \vec{k}'_A \rangle \langle 0 | \vec{k}'_1 \dots \vec{k}'_A \rangle \langle \vec{k}_1 \dots \vec{k}_A | 0 \rangle,$$

$$- \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \sum_{\alpha} \int d\vec{k}'_{\alpha} d\vec{k}_{\alpha} \langle \vec{k}'_{\alpha} | \langle \vec{k}' | t_{\alpha} | \vec{k} \rangle | \vec{k}_{\alpha} \rangle$$

$$\cdot \int \prod_{i \neq \alpha} d\vec{k}_i \langle 0 | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{\alpha} \dots \vec{k}_A \rangle \langle \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{\alpha} \dots \vec{k}_A | 0 \rangle,$$

$$- \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \sum_{\alpha} \int d\vec{k}'_{\alpha} d\vec{k}_{\alpha} \langle \vec{k}'_{\alpha} | \langle \vec{k}' | t_{\alpha} | \vec{k} \rangle | \vec{k}_{\alpha} \rangle \cdot \rho(\vec{k}'_{\alpha}, \vec{k}_{\alpha}),$$

en posant

$$\rho(\vec{k}'_{\alpha}, \vec{k}_{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}'_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} - \vec{k}_{\alpha} \vec{r}_{\alpha})} d\vec{r}'_{\alpha} d\vec{r}_{\alpha}$$

$$\cdot \prod_{i \neq \alpha} d\vec{r}_i \langle 0 | \vec{r}_1 \dots \vec{r}'_{\alpha} \dots \vec{r}_A \rangle \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_{\alpha} \dots \vec{r}_A | 0 \rangle.$$

Approximation d'impulsion

On suppose qu'on peut remplacer la matrice de diffusion sur nucléon lié par la matrice de diffusion sur nucléon libre.

$$\langle \vec{k}' | t_\alpha | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' | \tau_\alpha | \vec{k} \rangle$$

et on écrit la conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{k}'_\alpha = \vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha \quad . \quad \text{Dans ces conditions on a}$$

$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \sum_\alpha \int d\vec{k}_\alpha \langle \vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha | \langle \vec{k}' | \tau_\alpha | \vec{k} \rangle | k_\alpha \rangle$$

$$. \rho(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha, \vec{k}_\alpha) .$$

Approximation statique

On suppose que la masse du pion est négligeable devant celle du nucléon.

L'amplitude de transition dans le système du laboratoire peut être écrite en fonction de l'amplitude dans le système du centre de masse pion-nucléon sous la forme

$$\langle \vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha | \langle \vec{k}' | \tau_\alpha | \vec{k} \rangle | \vec{k}_\alpha \rangle = A \langle \vec{k}'^* | \tau_\alpha | \vec{k}^* \rangle ,$$

en introduisant le Jacobien

$$A^2 = \frac{(1 + \frac{2m}{M} \cos \theta^* + \frac{m^2}{M^2})^{3/2}}{|1 + \frac{m}{M} \cos \theta^*|} \neq 1 \quad \text{si} \quad \frac{m}{M} \ll 1 .$$

Par ailleurs d'après la cinématique classique

$$\vec{k}^* = \frac{M\vec{k} - m\vec{k}_\alpha}{M + m} \neq \vec{k} \quad \text{et}$$

$$\vec{k}'^* = \frac{M\vec{k}' - m(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha)}{M + m} \neq \vec{k}' .$$

Dans ces conditions on peut écrire plus simplement

$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \sum_\alpha \langle \vec{k}' | \tau_\alpha | \vec{k} \rangle . \int d\vec{k}_\alpha \rho(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha, \vec{k}_\alpha) ,$$

$$\text{avec} \quad \int d\vec{k}_\alpha \rho(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{k}_\alpha, \vec{k}_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}_\alpha e^{i\vec{k}_\alpha (\vec{r}'_\alpha - \vec{r}_\alpha)}$$

$$. e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}_\alpha} d\vec{r}'_\alpha d\vec{r}_\alpha \prod_{i \neq \alpha} d\vec{r}_i \langle 0 | \vec{r}'_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha | 0 \rangle =$$

$$\int \prod_i d\vec{r}_i e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}_\alpha} \langle 0 | \vec{r}_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha | 0 \rangle =$$

$$\int d\vec{r} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) = \rho(\vec{q}),$$

facteur de forme du noyau ou probabilité (indépendante de α) d'obtenir un transfert d'impulsion $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$.

On trouve ainsi

$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \rho(\vec{q}) \sum_{\alpha} \langle \vec{k}' | \tau_{\alpha} | \vec{k} \rangle.$$

Il ne reste plus qu'à faire une moyenne sur les nucléons en posant

$$\langle \vec{k}' | \tau | \vec{k} \rangle = \frac{Z}{A} \langle \vec{k}' | \tau_p | \vec{k} \rangle + \frac{A-Z}{A} \langle \vec{k}' | \tau_n | \vec{k} \rangle$$

où τ_p et τ_n sont les amplitudes de diffusion sur proton et neutron, sans renversement de spin (noyau à couches complètes).

Finalement on peut écrire

$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = A \cdot \langle \vec{k}' | \tau | \vec{k} \rangle \cdot \rho(\vec{q}).$$

D. Potentiel optique de Kisslinger

L'étude de l'interaction π -nucléon a montré que la seule considération de l'onde s est insuffisante, l'onde p étant dominante, même à basse énergie.

Kisslinger⁽²⁸⁾ en tient compte en écrivant une formule de départ qui contient deux termes :

$$\langle \vec{k}' | \tau | \vec{k} \rangle = \alpha_0(E) + \alpha_1(E) \vec{k} \cdot \vec{k}' \approx f(\theta).$$

Il vient alors

$$\langle \vec{r} | V | \psi \rangle = \int \langle \vec{r} | \vec{k}' \rangle \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \psi \rangle d\vec{k}' d\vec{k} d\vec{r}'$$

$$= \frac{A}{(2\pi)^3} \int (\alpha_0 + \alpha_1 \vec{k} \cdot \vec{k}') e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \rho(\vec{q}) \psi(\vec{r}') d\vec{k}' d\vec{k} d\vec{r}'$$

$$= \frac{A}{(2\pi)^3} (\alpha_0 S_0 + \alpha_1 S_1) \quad \text{avec,}$$

$$S_0 = \int e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_{\alpha})} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_{\alpha})} \rho(\vec{r}_{\alpha}) \psi(\vec{r}') d\vec{k}' d\vec{k} d\vec{r}' d\vec{r}_{\alpha} \quad \text{et}$$

$$S_1 = \int \vec{\nabla}_{\vec{r}} \psi(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}, e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_{\alpha})} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_{\alpha})} \rho(\vec{r}_{\alpha}) d\vec{k}' d\vec{k} d\vec{r}' d\vec{r}_{\alpha}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} S_0 &= (2\pi)^6 \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_{\alpha}) \rho(\vec{r}_{\alpha}) \psi(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r}_{\alpha} \\ &= (2\pi)^6 \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \rho(\vec{r}_{\alpha}) \psi(\vec{r}_{\alpha}) d\vec{r}_{\alpha} \\ &= (2\pi)^6 \rho(\vec{r}) \psi(\vec{r}), \quad \text{et de même} \end{aligned}$$

$$S_1 = (2\pi)^6 \int \vec{\nabla}_r \psi(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha) \delta(\vec{r}'-\vec{r}_\alpha) \rho(\vec{r}_\alpha) d\vec{r}' d\vec{r}_\alpha$$

$$= (2\pi)^6 \int \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha) \rho(\vec{r}_\alpha) I(\vec{r}_\alpha) d\vec{r}_\alpha \quad \text{avec}$$

$$I = [\psi(\vec{r}') \delta(\vec{r}'-\vec{r}_\alpha)]_{r'=\infty} - \int \delta(\vec{r}'-\vec{r}_\alpha) \vec{\nabla}_r \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$= - \vec{\nabla}_{r_\alpha} \psi(\vec{r}_\alpha) . \quad \text{Il vient alors}$$

$$S_1 = - (2\pi)^6 \int \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha) \rho(\vec{r}_\alpha) \vec{\nabla}_{r_\alpha} \psi(\vec{r}_\alpha) d\vec{r}_\alpha$$

$$= - (2\pi)^6 \vec{\nabla}_r \rho(\vec{r}) \vec{\nabla}_r \psi(\vec{r}) .$$

Finalement on obtient l'expression du potentiel optique

$$V(\vec{r}) = (2\pi)^3 A [\alpha_0 \rho(\vec{r}) - \alpha_1 \vec{\nabla} \rho(\vec{r}) \vec{\nabla}] .$$

On voit qu'il apparaît, en plus du terme classique proportionnel à la densité nucléaire, un terme gradient non-local. Les coefficients α_0 et α_1 sont des grandeurs complexes qui peuvent être l'objet d'évaluations théoriques. Comme les pertes en particules sont données par l'intégrale

$$- \frac{\hbar}{2im} \int (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) dS =$$

$$- \frac{\hbar}{2im} \int (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) d\vec{r} =$$

$$- \frac{\hbar}{2im} \int (\psi^* V \psi - \psi V^* \psi^*) d\vec{r} = - \frac{\hbar}{2im} (A_0 + A_1), \quad \text{avec}$$

$$A_0 = (\alpha_0 - \alpha_0^*) \int \rho \psi \psi^* d\vec{r} = 2i \text{Im} \alpha_0 \int \rho |\psi|^2 d\vec{r} \quad \text{et}$$

$$A_1 = - \int [\alpha_1 \psi^* \vec{\nabla} (\rho \vec{\nabla} \psi) - \alpha_1^* \psi \vec{\nabla} (\rho \vec{\nabla} \psi^*)] d\vec{r} . \quad \text{Il vient}$$

$$\int \alpha_1 \psi^* \vec{\nabla} (\rho \vec{\nabla} \psi) d\vec{r} = [\alpha_1 \psi^* (\rho \vec{\nabla} \psi)]_{r=\infty} - \int \alpha_1 (\vec{\nabla} \psi^*) (\rho \vec{\nabla} \psi) d\vec{r},$$

$$\int \alpha_1^* \psi \vec{\nabla} (\rho \vec{\nabla} \psi^*) d\vec{r} = [\alpha_1^* \psi (\rho \vec{\nabla} \psi^*)]_{r=\infty} - \int \alpha_1^* (\vec{\nabla} \psi) (\rho \vec{\nabla} \psi^*) d\vec{r},$$

$$A_1 = (\alpha_1 - \alpha_1^*) \int \rho (\vec{\nabla} \psi) (\vec{\nabla} \psi^*) d\vec{r} = 2i \text{Im} \alpha_1 \int \rho |\vec{\nabla} \psi|^2 d\vec{r} .$$

Finalement on trouve le résultat

$$- \frac{\hbar}{2im} (A_0 + A_1) = - \frac{\hbar}{m} \left[\text{Im} \alpha_0 \int \rho |\psi|^2 d\vec{r} + \text{Im} \alpha_1 \int \rho |\vec{\nabla} \psi|^2 d\vec{r} \right]$$

d'où il résulte que $\text{Im} \alpha_0$ et $\text{Im} \alpha_1$ sont des quantités < 0 (il y a absorption possible mais non création dans la voie élastique).

Les valeurs théoriques α_0 et α_1 s'obtiennent en tenant compte de tous les états possibles du système pion-nucléon. Si on utilise les notations de Fermi pour les amplitudes de diffusion :

$$\begin{array}{cccc} \ell = 0, I = \frac{1}{2} & \ell = 1, I = \frac{1}{2} & \ell = 1, I = \frac{3}{2} \\ T = \frac{1}{2} & a_1 & a_{11} & a_{13} \\ T = \frac{3}{2} & a_3 & a_{31} & a_{33} \end{array}$$

on obtient

$$f_p(\theta) = \frac{1}{k} \sum_0 (2\ell + 1) a_{\ell p} P_\ell(\cos\theta) = \frac{1}{k} [a_{0p} + 3 a_{1p} \cos\theta]$$

$$f_n(\theta) = \frac{1}{k} \sum_0 (2\ell + 1) a_{\ell n} P_\ell(\cos\theta) = \frac{1}{k} [a_{0n} + 3 a_{1n} \cos\theta]$$

pour les diffusions sur proton et neutron respectivement, avec

$$a_{0p} = \frac{1}{3} (a_3 + 2 a_1)$$

$$a_{0n} = a_3$$

$$a_{1p} = \frac{1}{9} (2 a_{33} + a_{31} + 4 a_{13} + 2 a_{11})$$

$$a_{1n} = \frac{1}{3} (2 a_{33} + a_{31}).$$

Finalement on peut écrire

$$\alpha_0 \propto \frac{1}{k} \left[\frac{Z}{A} a_{0p} + \frac{A-Z}{A} a_{0n} \right] \quad \text{et}$$

$$\alpha_1 \propto \frac{1}{k^3} \left[\frac{Z}{A} 3 a_{1p} + \frac{A-Z}{A} 3 a_{1n} \right],$$

avec des coefficients de normalisation variables suivant les auteurs.

C H A P I T R E VII

ANALYSE EN POTENTIEL OPTIQUE ET DISCUSSION PHYSIQUE

A. Choix de l'analyse

Il est intéressant de faire une analyse s'appuyant sur des hypothèses simples, ou même purement phénoménologique, pour avoir une idée physique des phénomènes. De ce point de vue il est classique de faire une analyse en déphasages ou une analyse en potentiel optique.

Une analyse en déphasages aurait l'avantage de ne faire appel à aucun modèle a priori, cependant, dans notre cas, le nombre de valeurs nécessaires pour ℓ est 10, ce qui fait 20 paramètres indépendants soit généralement plus que le nombre de points expérimentaux à chaque énergie.

Nous n'avons pas fait suffisamment de mesures vers l'arrière pour mettre en évidence les structures correspondant aux déphasages d'ordre élevé et permettre leur calcul sans ambiguïté. Des essais ont d'ailleurs montré, contrairement à ce qu'on pouvait attendre, que l'obtention de bons χ^2 dans ces conditions est extrêmement difficile, le nombre de contraintes étant trop faible pour que l'optimisation s'effectue de façon satisfaisante. Le calcul se perd dans les accidents de forme de la fonction χ^2 et converge finalement vers quelque minimum secondaire.

La recherche des "fits" dans un espace à 20 dimensions demande des prouesses de virtuosité numérique et pose des problèmes techniques de vitesse et de mémoire presque insurmontables dans l'état actuel des ordinateurs. Le nombre de paramétrisations obtenues est considérable et il est pratiquement impossible de les visualiser et d'y discerner des classes possédant un comportement continûment variable en fonction de l'énergie. Nous avons essayé des programmes de classement qui étudient les distances de ces optimums et la forme des groupements obtenus dans l'espace à 21 dimensions (1 pour l'énergie). Un temps important a déjà été consacré à l'ensemble de ces calculs qui ne nous ont pas encore donné

de résultats très encourageants. Huguenin et son équipe (communication privée) semblent obtenir de meilleurs résultats en imposant certaines conditions théoriques aux déphasages. Mais alors les résultats obtenus ne sont plus libres de toute hypothèse et un des intérêts essentiels de la méthode se trouve sacrifié.

L'analyse en potentiel optique pose des problèmes moins ardues en raison du faible nombre de paramètres. De plus ces paramètres peuvent être reliés à des quantités physiques qui ont fait l'objet d'estimations. En ce qui concerne l'interaction pion-noyau, la théorie a été développée par Wattson⁽⁵⁸⁾, Kisslinger⁽²⁸⁾, Ericson⁽²⁹⁾, et on a obtenu de bonnes prévisions pour la diffusion à basse énergie. Il est naturel de se demander comment les paramètres optiques évoluent à plus haute énergie, dans la zone de la résonance $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ où aucune autre théorie n'est actuellement proposée.

Notre analyse comporte 5 paramètres essentiels : le rayon nucléaire et deux coefficients complexes correspondant à un terme local et à un terme non-local dans le potentiel. Un 6ème paramètre est le facteur d'échelle F (voir Chapitre IV bis) qui permet de déplacer l'ensemble des valeurs des sections efficaces différentielles par rapport à la valeur de la section efficace totale. Ce coefficient a toujours été trouvé voisin de 1. - Pour vérifier nos calculs et étendre notre champ d'analyse, nous avons repris les données de Edelstein et al⁽⁴⁸⁾, à 69,5 et 87,5 MeV. Nous ne connaissons pas σ_T à ces énergies et avons pris $F = 1$.

Nous avons choisi une densité nucléaire en puits carré de façon à éviter des paramètres supplémentaires. Par ailleurs nous manquons de points vers l'arrière et un modèle en puits carré convient parfaitement pour étudier la diffusion aux faibles angles et jusqu'à des moments de transfert de l'ordre de 50 000 (MeV/c)².[†]

[†] Dans l'approximation de Born, l'amplitude de diffusion

$$f(\theta) \propto \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \neq \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = A \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \cdot \rho(\vec{q})$$

est proportionnelle au facteur de forme du noyau. Tant que le transfert d'impulsion est faible, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin qr}{qr} \rho(r) 4 \pi r^2 dr \neq \int_0^\infty \rho(r) 4 \pi r^2 dr$$

est indépendante de la fonction densité $\rho(r)$. La variation devient sensible lorsque $qr \sim \pi$ et $r \sim R$. Dans notre cas on trouve la valeur critique

$$q \sim \frac{3}{R} = \frac{3 \times 200}{2,7} = 220 \text{ MeV/c, soit } t = q^2 \sim 50\,000 \text{ (MeV/c)}^2.$$

Cette limitation correspond à une zone comprenant : le pic de diffraction vers l'avant, le premier minimum, le second maximum et la descente vers le minimum suivant. Pratiquement :

- Pour $E > 200$ MeV,
nous avons pris toutes les mesures ($\theta \leq 70^\circ$)
- Pour $E \leq 200$ MeV,
nous nous sommes limités aux angles $\theta \leq 80, 90$ ou 100° suivant l'énergie
- Pour $E = 69,5$ et $87,5$ MeV (Edelstein et al) nous avons pris toutes les mesures ($\theta \leq 125^\circ$).

B. Méthode de calcul

1. Dans notre gamme d'énergie les pions sont relativistes et obéissent à l'équation de Klein-Gordon.

Rappelons que l'impulsion relativiste est un quadrivecteur

$$P = \left[\vec{p} \mid i \frac{E}{c} \right],$$

et que l'équation de Klein-Gordon s'obtient à partir de

$$|P|^2 + m_0^2 c^2 = P_\mu P_\mu + m_0^2 c^2 = 0,$$

en posant

$$P_\mu \equiv -i \hbar \frac{\partial}{\partial R_\mu}, \quad R_\mu \text{ désignant les composantes du quadrivecteur}$$

$$R = \left[\vec{r} \mid i c t \right].$$

On arrive ainsi à l'équation d'onde

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0.$$

On peut introduire des potentiels quadrivecteurs. Dans le cas d'un champ électromagnétique la méthode consiste à partir de

$$(P_\mu + e A_\mu)(P_\mu + e A_\mu) + m_0^2 c^2 = 0,$$

A_μ désignant les composantes du quadrivecteur

$$A = \left[\vec{A} \mid i \frac{A_0}{c} \right].$$

Dans le cas général on ne sait pas comment introduire un potentiel dans une équation relativiste et il est classique de procéder comme pour le potentiel Coulombien (4ème composante de A). On obtient alors

$$\left[\nabla^2 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} + e A_0 \right)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

et en posant (solution stationnaire)

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

$$\left[\nabla^2 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (E+W)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}) = 0, \text{ soit}$$

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(\vec{r}) = - \frac{1}{\hbar^2 c^2} (2 E W + W^2) \psi(\vec{r})$$

ou encore

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(\vec{r}) \neq - \frac{2 E W}{\hbar^2 c^2} \psi(\vec{r}),$$

avec $W = e A_0$ énergie potentielle et

$$k = \sqrt{\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2}} = \frac{p}{\hbar} \quad \text{vecteur d'onde.}$$

L'approximation (voir par exemple Auerbach⁽⁵³⁾ ou thèse de Crozon 1964 Paris)

$W \ll E$ étant universellement admise, on voit que l'équation d'onde utilisée

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(\vec{r}) = W^* \psi(\vec{r})$$

est identique à l'équation de Schrödinger, mis à part le calcul relativiste de l'impulsion. L'obtention de ce résultat est la seule justification du processus.

2. Nous avons fait les calculs dans le système du centre de masse en négligeant le Coulombien dans l'équation de départ, le potentiel adopté étant de la forme

$$W^*(\vec{r}) = k^2 V(r) - \vec{\nabla} [U(r) \vec{\nabla}] ,$$

avec des fonctions à symétrie sphérique

$$V(r) = V \cdot \rho(r) \quad , \quad V = \text{cte} \quad \text{et}$$

$$U(r) = U \cdot \rho(r) \quad , \quad U = \text{cte.}$$

C'est le potentiel de Kisslinger tel qu'il a été défini au chapitre précédent. On peut ajouter un terme proportionnel à $[\rho(r)]^2$ représentant

l'absorption possible d'un pion sur une paire de nucléons. Krell et Görres (voir thèse de Görres 1969 Karlsruhe) ont fait une analyse comportant ce terme additionnel et concluent à sa faible influence sur les résultats.

Nous avons admis une densité nucléaire en puits carré, telle que

$$\rho(r < R) = \rho_0 = \frac{3 A}{4 \pi R^3} ,$$

$$\rho(r > R) = 0.$$

Dans ces conditions l'équation d'onde est soluble analytiquement, ce qui constitue un avantage considérable pour la programmation. En effet on a

$$\vec{\nabla} \left[(1 + U(r)) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \right] + k^2 (1 - V(r)) \psi(\vec{r}) = 0$$

et en posant

$$\psi(\vec{r}) = \sum A_\ell \psi_\ell(r) P_\ell(\cos \theta), \text{ on trouve}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 (1 + U(r)) \frac{d}{dr} \psi_\ell \right] P_\ell \\ - \left[1 + U(r) \right] \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \psi_\ell P_\ell + k^2 (1 - V(r)) \psi_\ell P_\ell = 0. \end{aligned}$$

Pour $r < R$ il vient

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\psi_\ell) + \left[K^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] (r\psi_\ell) = 0 \text{ avec}$$

$$K = k \sqrt{\frac{1 - V\rho_0}{1 + U\rho_0}}.$$

Pour $r > R$ il vient

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\psi_\ell) + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] (r\psi_\ell) = 0.$$

Si on adopte les notations

$$\begin{aligned} r_1 &= Kr & \text{pour} & & r < R \\ r_1 &= kr & \text{pour} & & r > R, \end{aligned}$$

on obtient dans les deux cas l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dr_1^2} (r_1 \psi_\ell) + \left[1 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r_1^2} \right] (r_1 \psi_\ell) = 0 ,$$

dont la solution générale $\psi_\ell(r_1)$ est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel sphériques

$$j_\ell(r_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2 r_1}} J_{\ell + \frac{1}{2}}(r_1) \quad \text{et}$$

$$n_\ell(r_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2 r_1}} J_{-\ell - \frac{1}{2}}(r_1) \quad (\text{notations de Messiah})$$

qui ont pour comportement asymptotique

$$j_\ell(r_1 \rightarrow \infty) = \frac{1}{r_1} \sin\left(r_1 - \ell \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et}$$

$$n_\ell(r_1 \rightarrow \infty) = \frac{1}{r_1} \cos\left(r_1 - \ell \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $r < R$, comme $\psi_\ell(0)$ doit rester fini,

$$\psi_\ell(r) \propto j_\ell(Kr).$$

Pour $r > R$, il faut écrire

$$\begin{aligned} \psi_\ell(r) &\propto \cos \delta_\ell j_\ell(kr) + \sin \delta_\ell n_\ell(kr) \\ &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \ell \frac{\pi}{2} + \delta_\ell\right) \quad \text{pour } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

3. On trouve la condition de raccordement des deux solutions en intégrant l'équation de Klein-Gordon sur l'intervalle $R \pm \epsilon$. En effet

$$\begin{aligned} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \vec{\nabla} \left[(1+U(r)) \vec{\nabla} \psi_\ell(r) P_\ell(\cos \theta) \right] r^2 dr \\ + \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} k^2 (1 - V(r)) \psi_\ell(r) P_\ell(\cos \theta) r^2 dr = 0 \end{aligned}$$

donne

$$\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \frac{d}{dr} \left[r^2 (1 + U(r)) \frac{d}{dr} \psi_\ell(r) \right] dr =$$

$$\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \left[(1 + U(r)) \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - k^2 (1 - V(r)) \right] \psi_\ell(r) r^2 dr = 0.$$

On obtient donc la condition.

$$\left[r^2 (1 + U(r)) \frac{d}{dr} \psi_\ell(r) \right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$(1 + U\rho_0) \left[\frac{d}{dr} \psi_\ell(r) \right]_{R-\epsilon} = \left[\frac{d}{dr} \psi_\ell(r) \right]_{R+\epsilon}.$$

Pour la commodité des calculs nous poserons

$$(1 + U\rho_0) \left[\frac{d}{dr} \text{Log } \psi_\ell(r) \right]_{R-\epsilon} = \left[\frac{d}{dr} \text{Log } \psi_\ell(r) \right]_{R+\epsilon} = q_\ell.$$

La connaissance de cette dérivée logarithmique permet le calcul du déphasage δ_ℓ puisque

$$q_\ell = \frac{\cos \delta_\ell j'_\ell(kR) + \sin \delta_\ell n'_\ell(kR)}{\cos \delta_\ell j_\ell(kR) + \sin \delta_\ell n_\ell(kR)}.$$

On trouve

$$e^{2i\delta_\ell} = \frac{h_\ell^- - q_\ell h_\ell^+}{h_\ell^+ - q_\ell h_\ell^-},$$

en définissant les fonctions de Hankel sphériques

$$h_\ell^\pm = n_\ell(kR) \pm i j_\ell(kR) \quad (\text{notations de Messiah}).$$

Il ne reste plus qu'à calculer

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2\ell+1) \left[e^{2i\delta_\ell} - 1 \right] P_\ell(\cos \theta) + f_c(\theta),$$

où $f(\theta)$ est l'amplitude de diffusion Coulombienne

(Voir appendice V).

Dans notre analyse nous avons négligé la déformation des ondes sphériques par le champ Coulombien. $f_c(\theta)$ a été calculé avec le facteur de forme de Hofstadter⁽⁵⁴⁾ pour le carbone 12 :

$$F(q^2) = \left[1 - \left(\frac{aq}{3} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{aq}{2} \right)^2}$$

qui correspond à une densité

$$\rho_c = \rho_{co} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{r^2}{a^2} \right] e^{-\frac{r^2}{a^2}},$$

avec

$$\rho_{co} = \frac{1}{3 (a\sqrt{\pi})^3} \quad \text{et} \quad a = 1,635 \text{ Fermi},$$

ce qui donne

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = a \sqrt{\frac{13}{6}} = 2,414 \text{ Fermi}.$$

4. Résumons la méthode de calcul :

- On choisit R , $\text{Re}(V)$, $\text{Im}(V)$, $\text{Re}(U)$, $\text{Im}(U)$.

- On calcule ρ_0 , K et

$$q_\ell = (1 + U\rho_0) \frac{d}{dr} \text{Log} [j_\ell(Kr)]_{r=R}.$$

- Comme on connaît k on en déduit

$$h_\ell^\pm(KR), \quad h_\ell^{\pm'}(KR), \quad e^{2i\delta_\ell}$$

et enfin $f(\theta)$ puis $|f(\theta)|^2$.

- On fait varier les paramètres pour obtenir des valeurs numériques compatibles avec les mesures.

Disons encore quelques mots sur les méthodes d'optimisation. Le programme calcule les sections efficaces différentielles et la section efficace totale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \text{ CAL et } \sigma_{\text{CAL}} \text{ à partir des déphasages,}$$

$$\text{puis } \chi^2 = \sum \left[\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega} \text{ CAL} - \frac{d\sigma}{d\Omega} \text{ EXP}}{\Delta \frac{d\sigma}{d\Omega} \text{ EXP}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_{\text{CAL}} - \sigma_{\text{EXP}}}{\Delta \sigma_{\text{EXP}}} \right]^2$$

quantité qu'il faut minimiser.

Dans une première méthode on calcule les différentes dérivées partielles premières

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial R} \dots \text{ puis les paramètres sont modifiés suivant les}$$

valeurs obtenues, de telle sorte que

$$\Delta R = \text{cte} \cdot \frac{\partial \chi^2}{\partial R} \dots$$

Le pas de progression est fonction de l'évolution du calcul. C'est la méthode du gradient ou "Steepest Descent".

Dans une deuxième méthode plus fine on calcule jusqu'aux dérivées secondes de la fonction χ^2 , ce qui permet de définir une quadrique osculatrice et de calculer directement la position approximative du minimum.

Le processus se poursuit jusqu'à ce qu'on n'obtienne plus d'amélioration sensible.

Remarque concernant les notations :

Les notations utilisées dans les calculs précédents sont V et U. Afin de comparer plus facilement les résultats de notre analyse avec les valeurs de Auerbach⁽⁵³⁾ nous nous sommes ramenés aux notations de cet auteur (b_0 et b_1) en posant les nouvelles définitions

$$V_R = \text{Re}(b_0) = - \text{Re} (V)/12$$

$$V_I = \text{Im}(b_0) = - \text{Im} (V)/12 > 0 ,$$

$$U_R = \text{Re} (b_1) = - \text{Re} (U)/12$$

$$U_I = \text{Im}(b_1) = - \text{Im} (U)/12 > 0 .$$

C. Résultats et interprétation

1. Présentation des résultats

Nous donnerons tout d'abord (courbes XI) quelques optimisations caractéristiques obtenues aux différentes énergies. Nous avons repris les données de sections efficaces élastiques de Edelstein et al à 69,5 et 87,5 MeV qui ont déjà été analysées par Auerbach⁽⁵³⁾ et par Huguenin⁽⁴⁹⁾ de façon à comparer avec les résultats de nos calculs.

On trouvera sur chaque graphique :

- la valeur maximale θ_M^* adoptée pour l'angle de diffusion, les mesures correspondant à des moments de transfert trop importants devant être éliminées dans le cas d'un modèle en puits carré.

- le facteur d'échelle F adopté, par lequel les valeurs de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ont été multipliées pour les adapter le mieux possible aux valeurs de σ_T (La comparaison est faite par l'intermédiaire du théorème optique).

- Les différents paramètres,

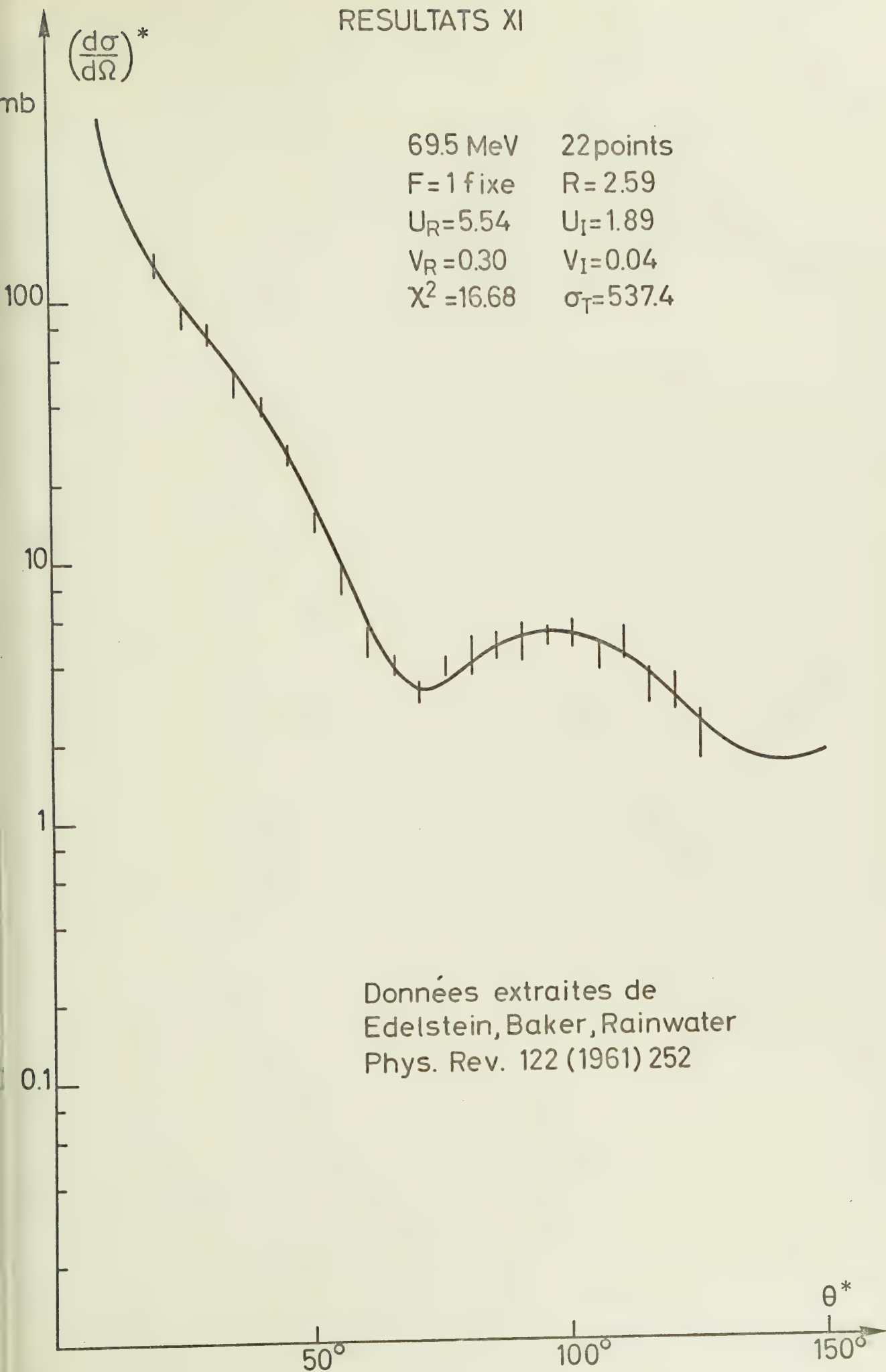
R en Fermi

U_R et U_I (terme gradient du potentiel) en (Fermi)³

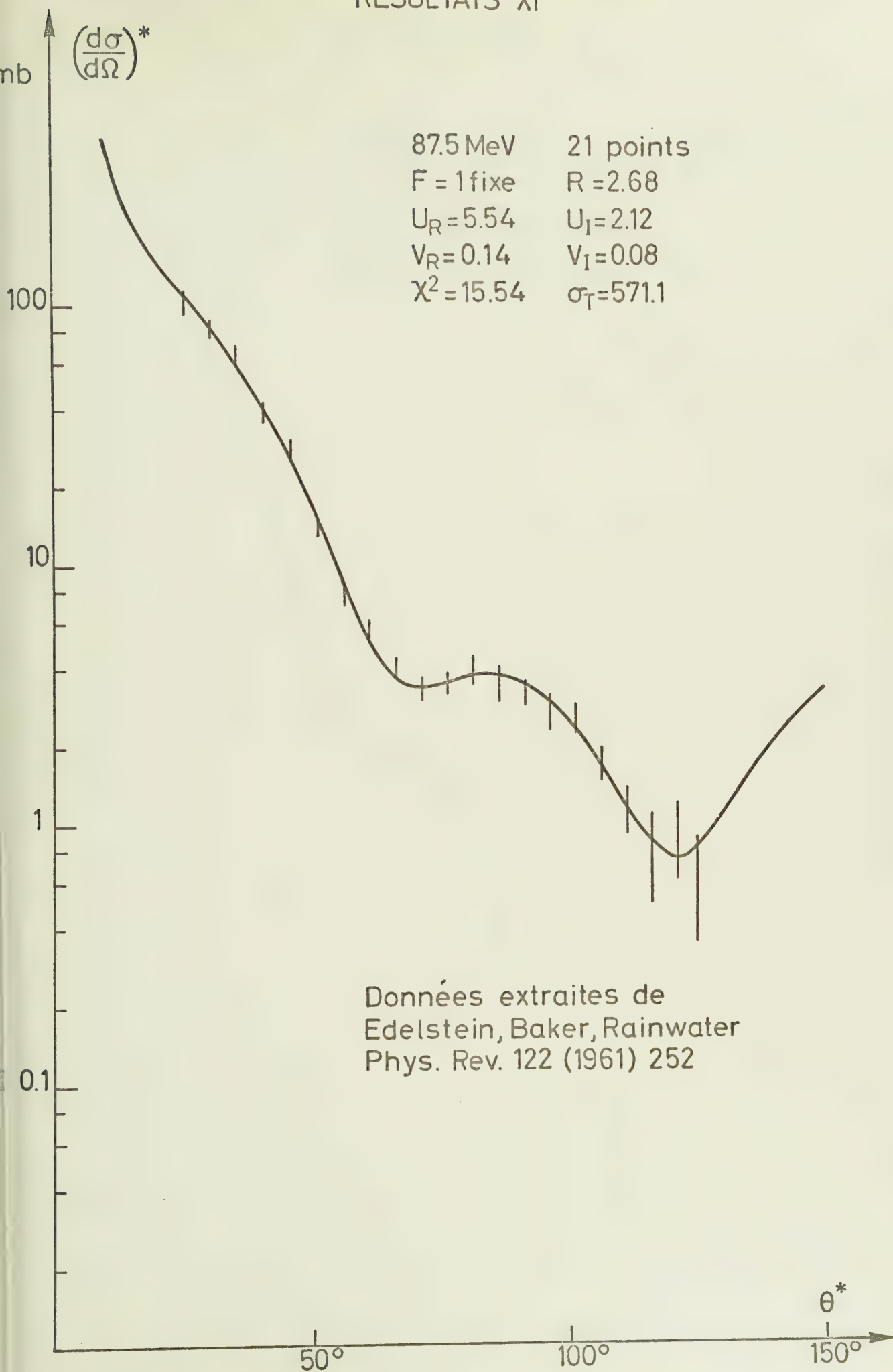
V_R et V_I (terme classique du potentiel) en (Fermi)³.

- la valeur de χ^2 .

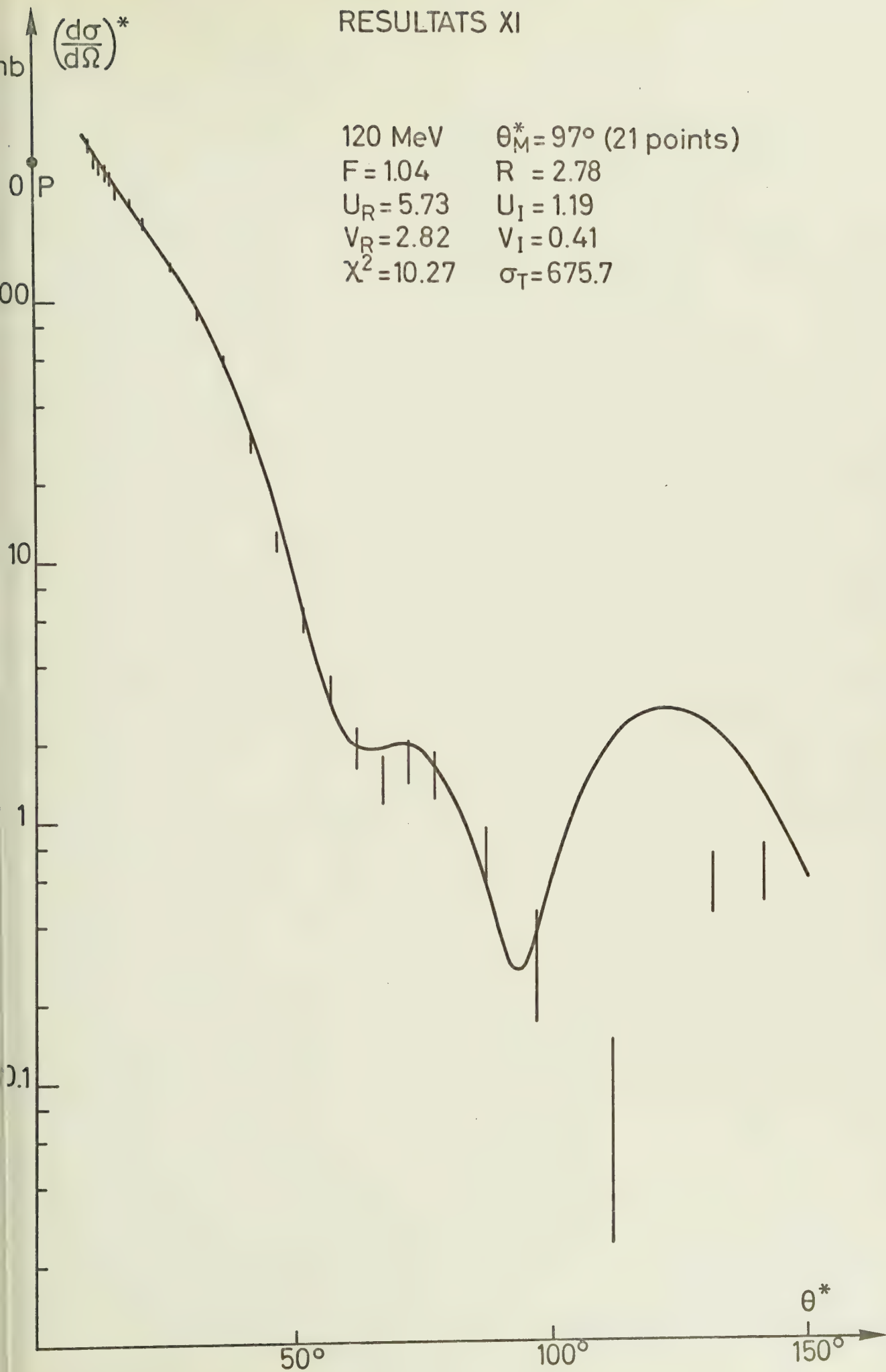
RESULTATS XI



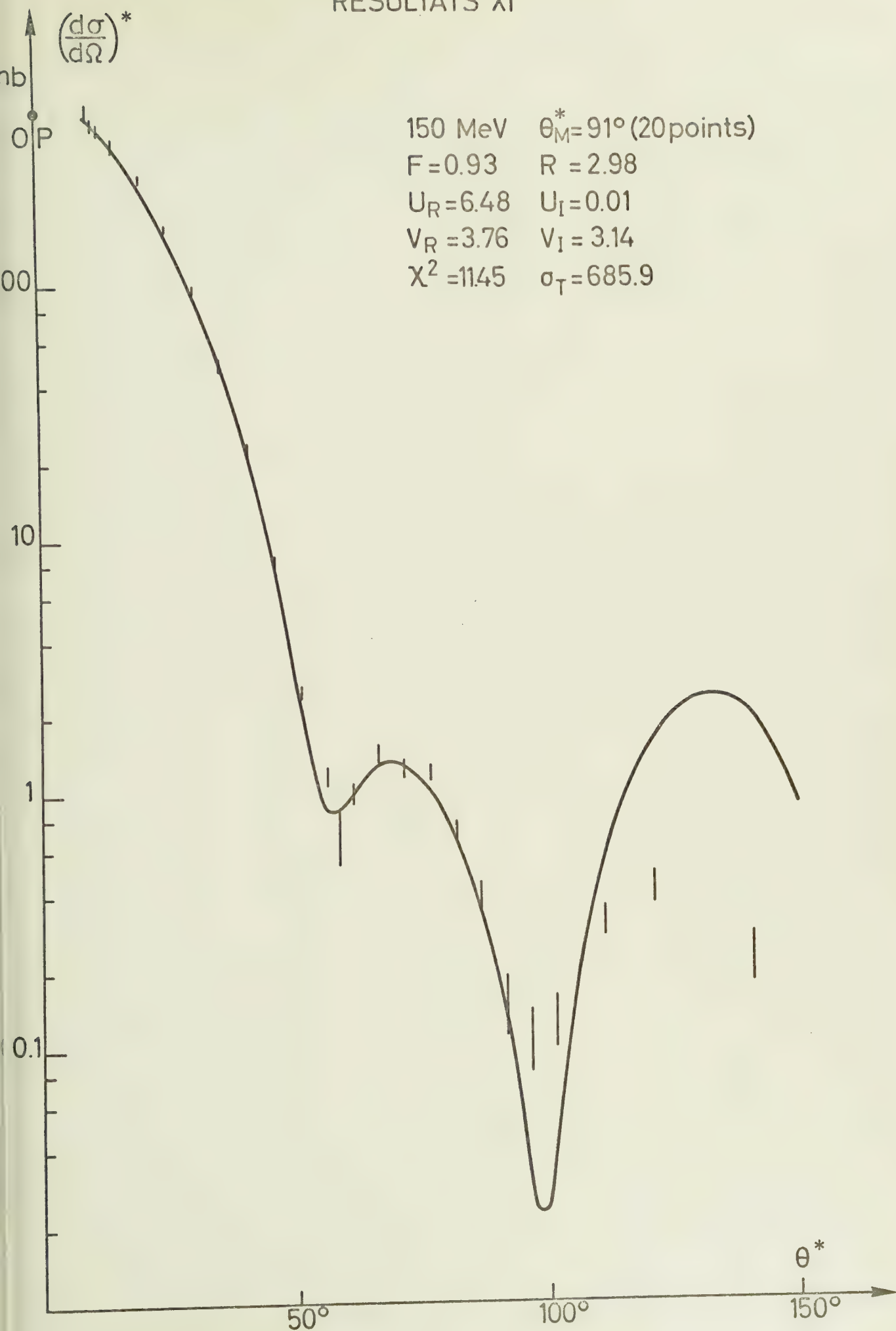
RESULTATS XI



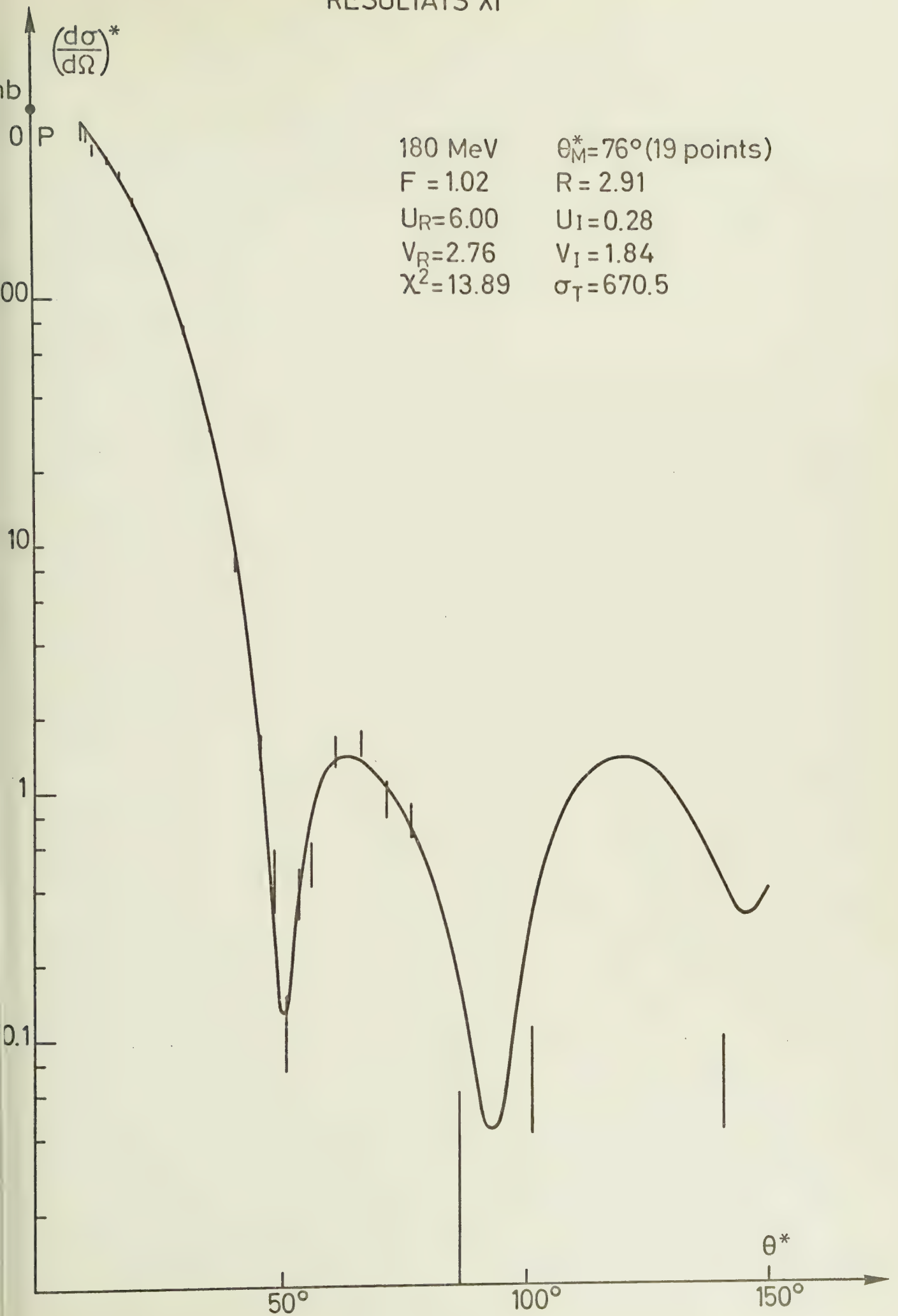
RESULTATS XI



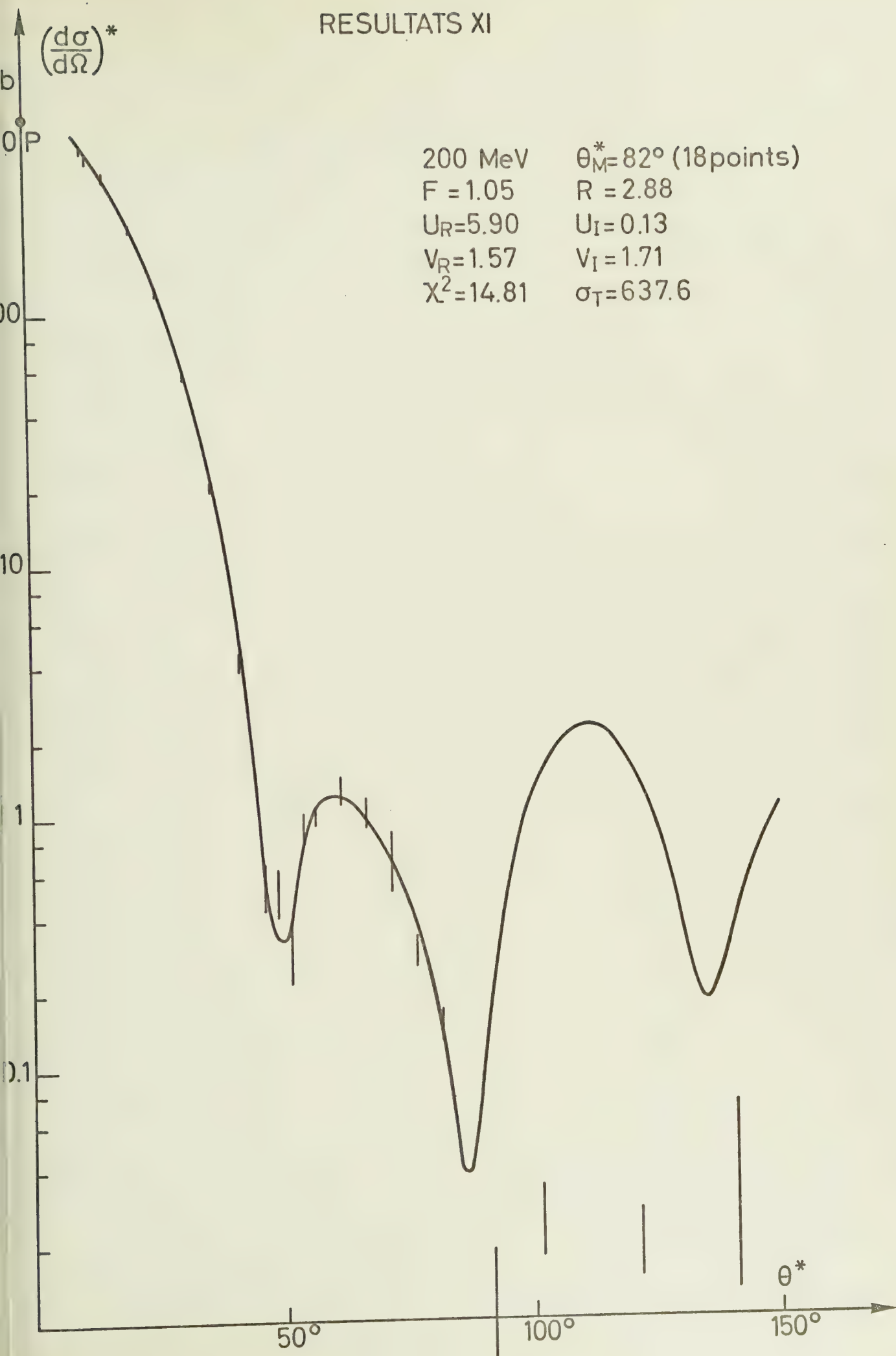
RESULTATS XI



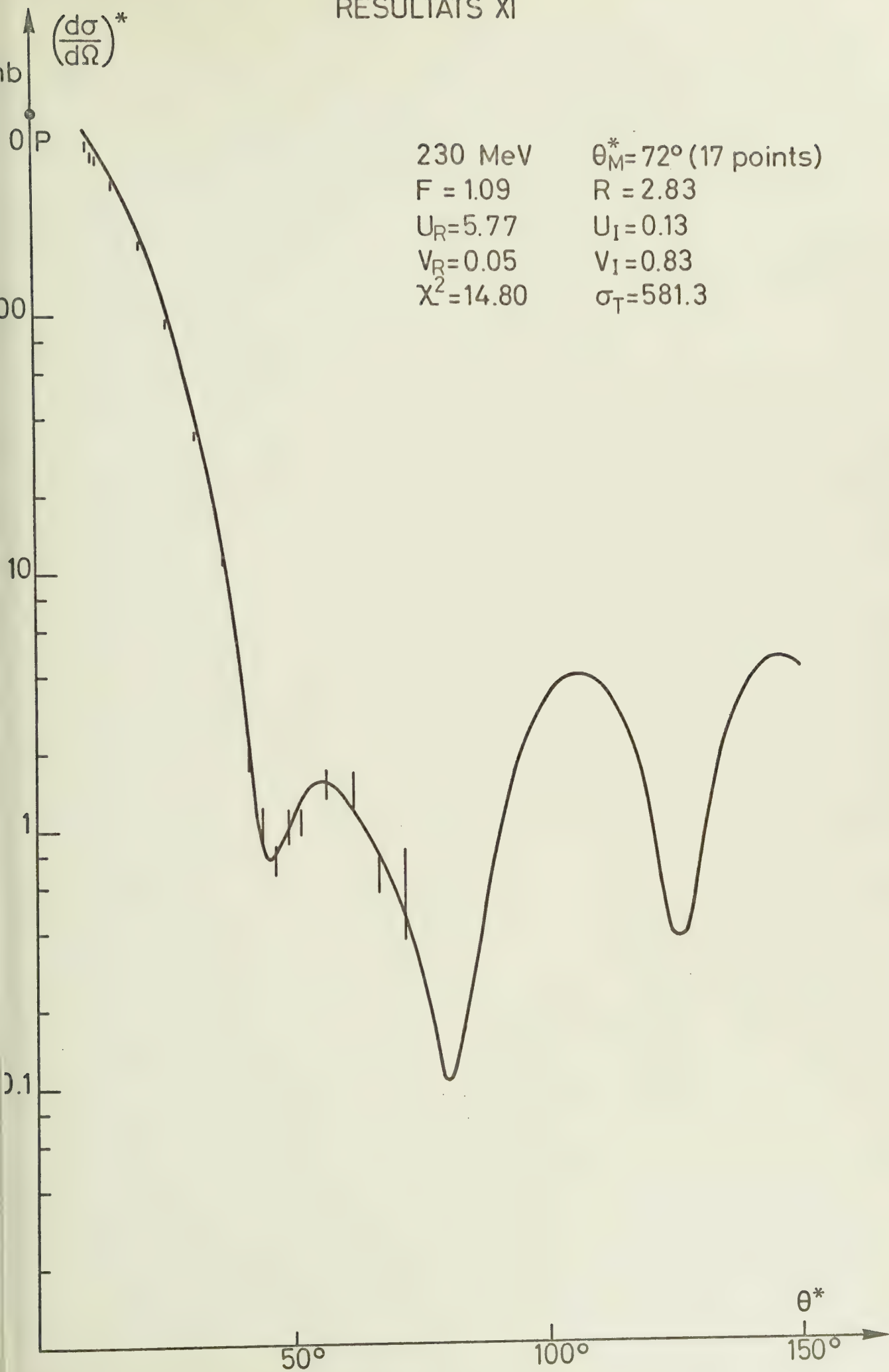
RESULTATS XI



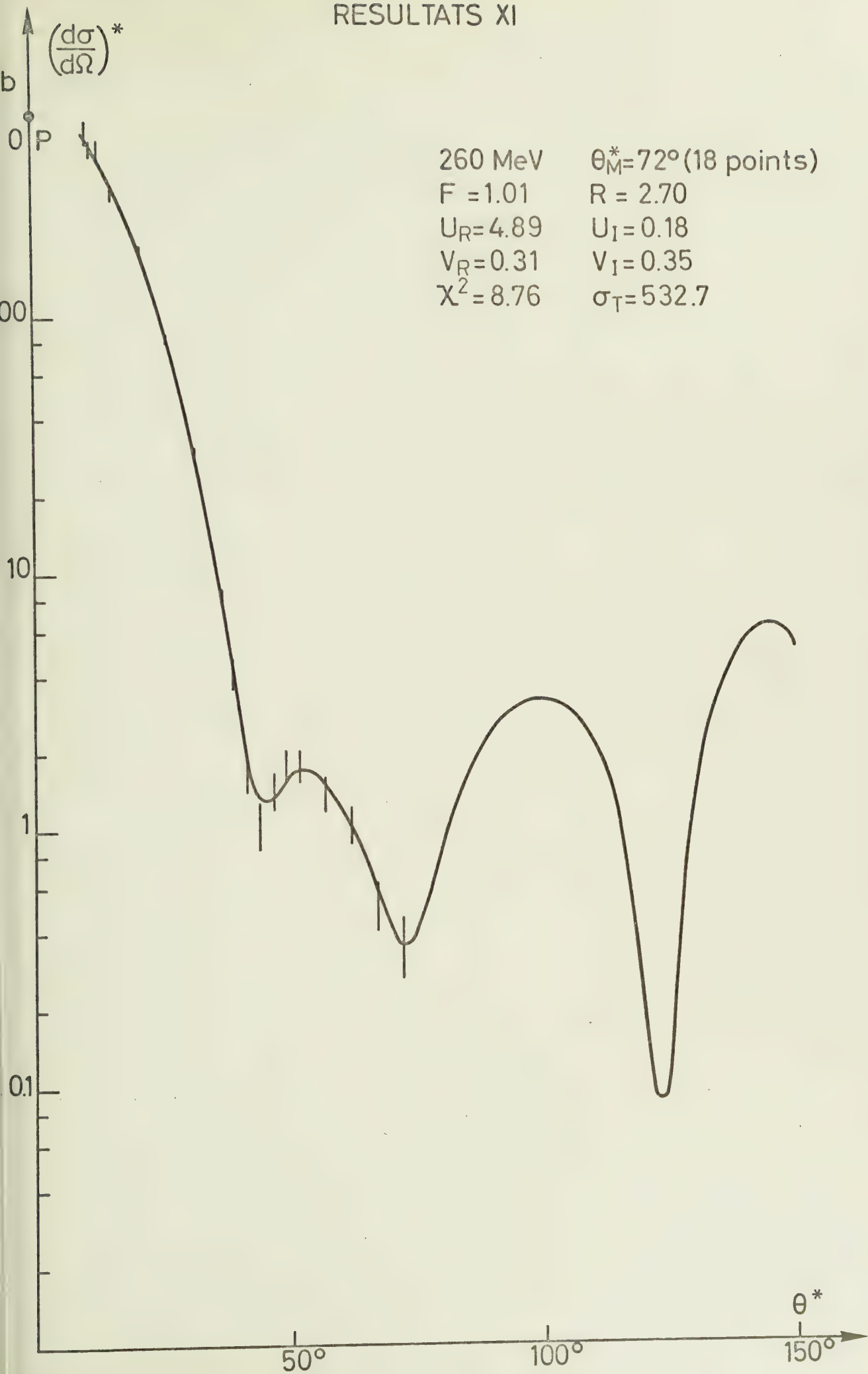
RESULTATS XI



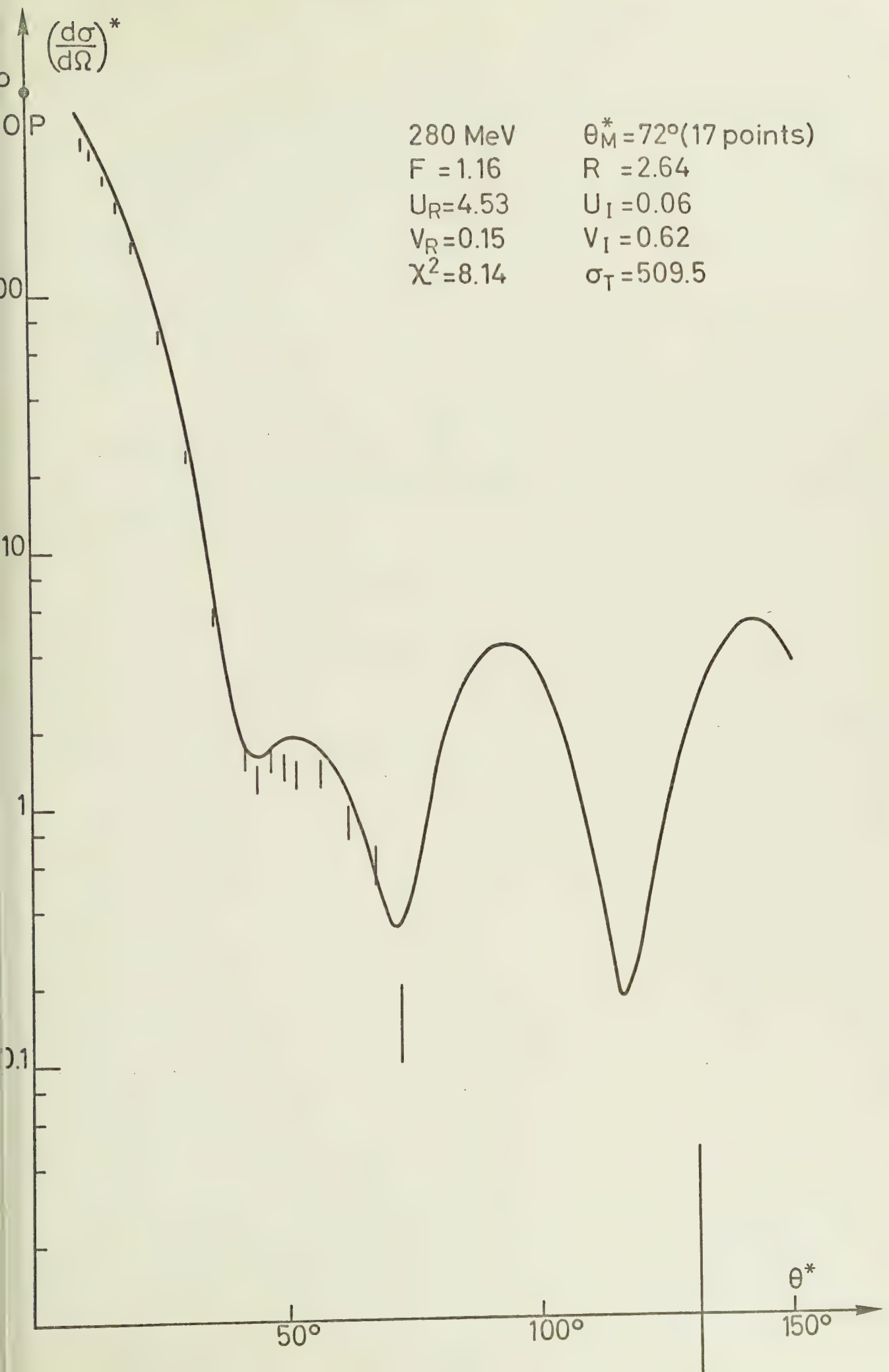
RESULTATS XI



RESULTATS XI



RESULTATS XI



L'accord entre les courbes calculées et les points expérimentaux est excellent et on trouve des valeurs $\chi^2 \sim n$, n étant le nombre de degrés de liberté de l'analyse. Il n'y a aucune difficulté à suivre leur évolution en fonction de l'énergie. Afin de donner une idée de la continuité, nous avons construit dans le diagramme d'Argand les graphes

$$\operatorname{Re} [\eta_\ell] = f(\operatorname{Im} [\eta_\ell]) \quad (\text{Courbes XII}),$$

où les points notés 1, 2, 3 ... 9 correspondent aux énergies 69,5, 87,5, 120 ... 280 respectivement.

Les graphes les plus caractéristiques sont ceux obtenus pour $\ell = 0, 1$ et 2 , où il est visible que la rotation s'effectue dans le sens inverse du sens trigonométrique, ce qui caractérise, non pas une résonance, mais une anti-résonance correspondant à une réflexion (avance) de l'onde partielle⁽⁵⁹⁾.

Un autre système de notations consiste à poser

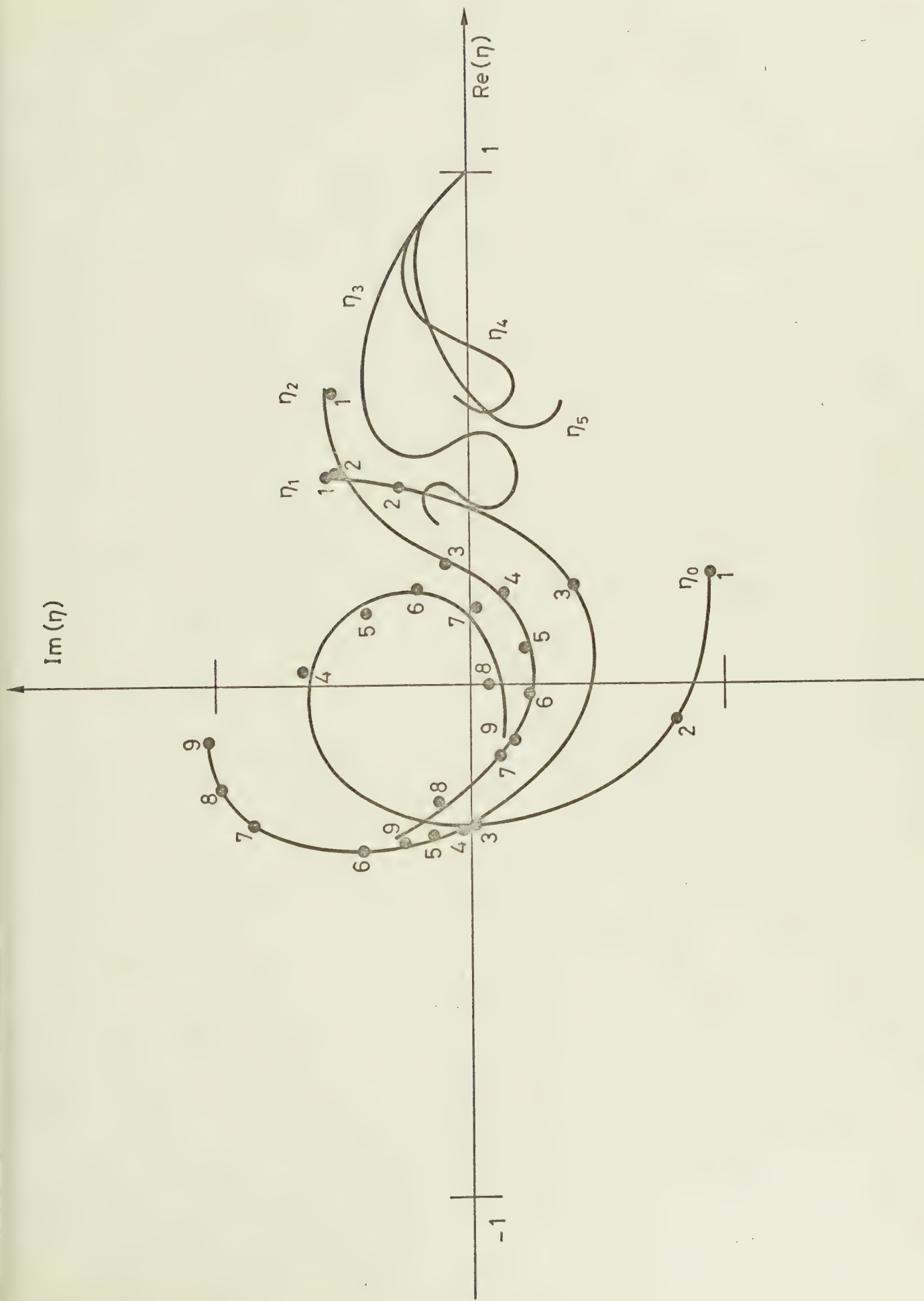
$$\eta_\ell = \exp(2 i \delta_\ell).$$

Nous avons également représenté les fonctions

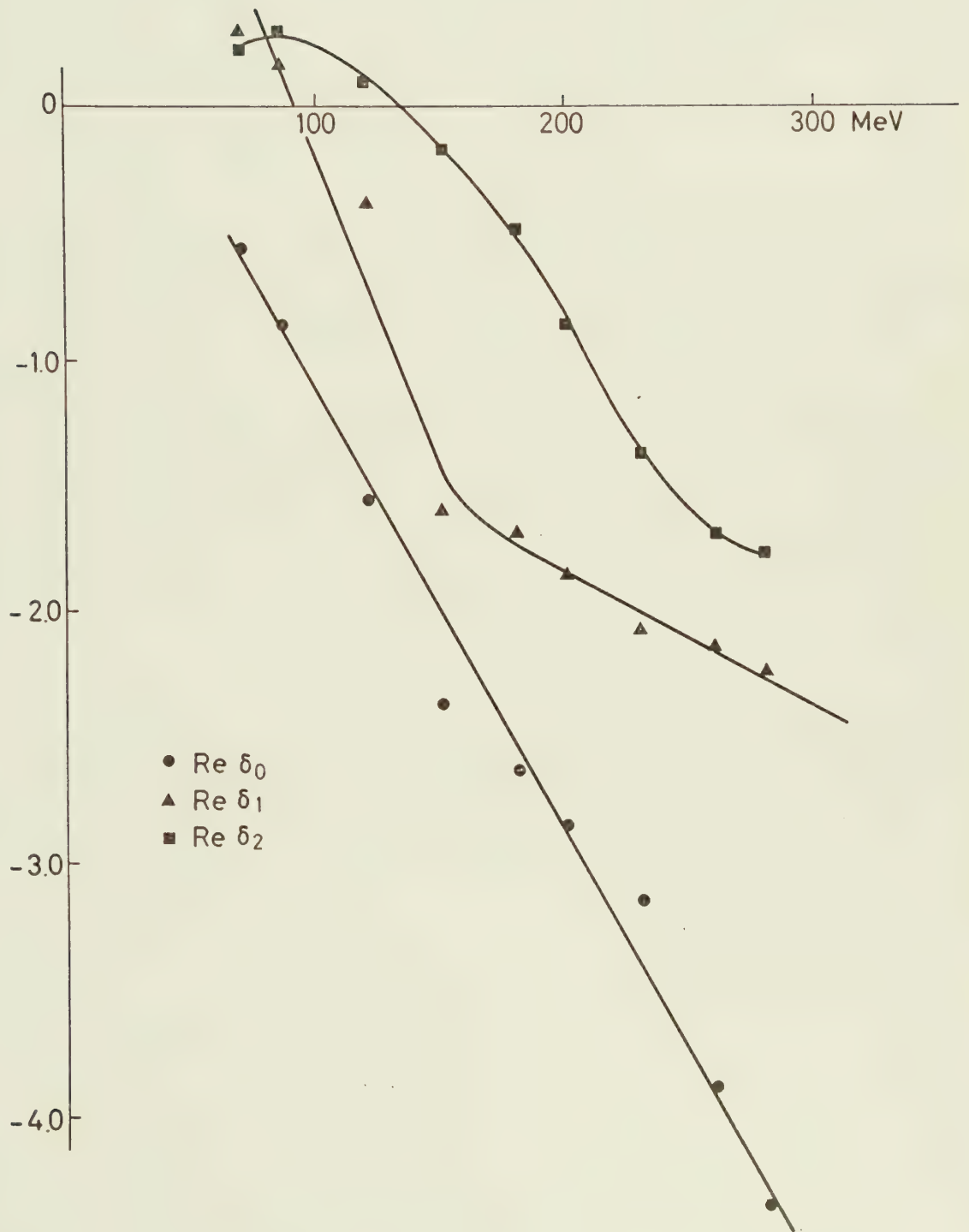
$$\operatorname{Re} (\delta_\ell) = f(E) \quad (\text{courbes XIII}).$$

On peut remarquer pour $\ell = 1$ un brusque changement de pente vers 150 MeV, pour un déphasage voisin de $\frac{\pi}{2}$.

RESULTATS XII



RESULTATS XIII



Il est intéressant de calculer directement $\text{Im}(f(0))$ et $\text{Re}(f(0))$ à partir des déphasages obtenus.

La première de ces grandeurs donne une estimation théorique de σ_T par le théorème optique. La seconde, qui n'a encore jamais été mesurée, a été estimée par Ericson et al⁽⁶⁰⁾ en utilisant les relations de dispersion. L'unité employée est la longueur d'onde Compton du pion

$$\frac{1}{m} \equiv \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{197,32}{139,58} \frac{\text{MeV.Fermi}}{\text{MeV}} = 1,414 \text{ Fermi.}$$

Le Tableau XIV donne les différentes grandeurs calculables à partir des résultats précédents. Le graphique suivant (Courbes XV) montre la variation obtenue pour $\text{Re}(f(0))$ en fonction de l'énergie et les valeurs théoriques prévues par Ericson. Nous reviendrons plus loin sur le désaccord.

Les procédures de minimisation automatique nous ont permis d'obtenir un grand nombre de "fits" groupés, pour chaque énergie, dans une zone qu'on peut décrire par les valeurs moyennes des paramètres et leurs déviations standard. Le Tableau XVI et les courbes XVII donnent les intervalles obtenus dans notre analyse phénoménologique.

Remarques :

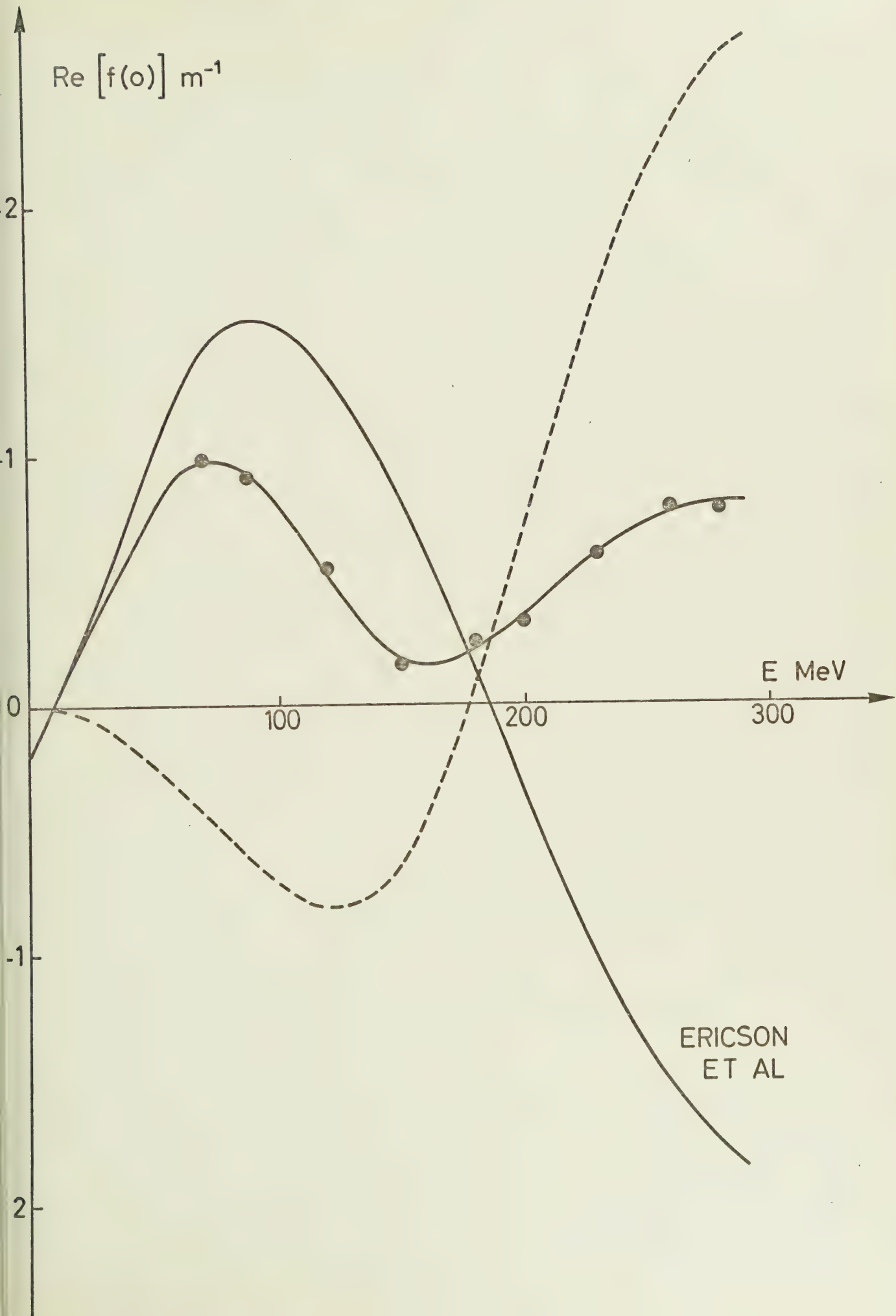
Les valeurs numériques indiquées dans ce paragraphe correspondent à des calculs effectués avec des valeurs de σ_T expérimentales non corrigées pour l'effet de désintégration en vol (erreur $\sim 1\%$). De plus le programme utilisait la valeur approximative (erreur $\sim 1\%$).

$$\hbar c \neq 200 \text{ MeV.Fermi.}$$

RESULTATS XIV

E (MeV)	Im f(0) (F)	σ_T (mb)	Re f(0) (F)	$\times \frac{140}{200}(\text{m}^{-1})$	Re/Im
69,5	3,05	537	1,42	0,99	0,47
87,5	4,00	571	1,32	0,92	0,33
120	5,76	676	0,80	0,56	0,14
150	6,77	686	0,23	0,16	0,04
180	7,46	670	0,37	0,26	0,05
200	7,63	638	0,48	0,34	0,06
230	7,68	581	0,87	0,61	0,11
260	7,67	533	1,15	0,80	0,15
280	7,75	510	1,13	0,79	0,15

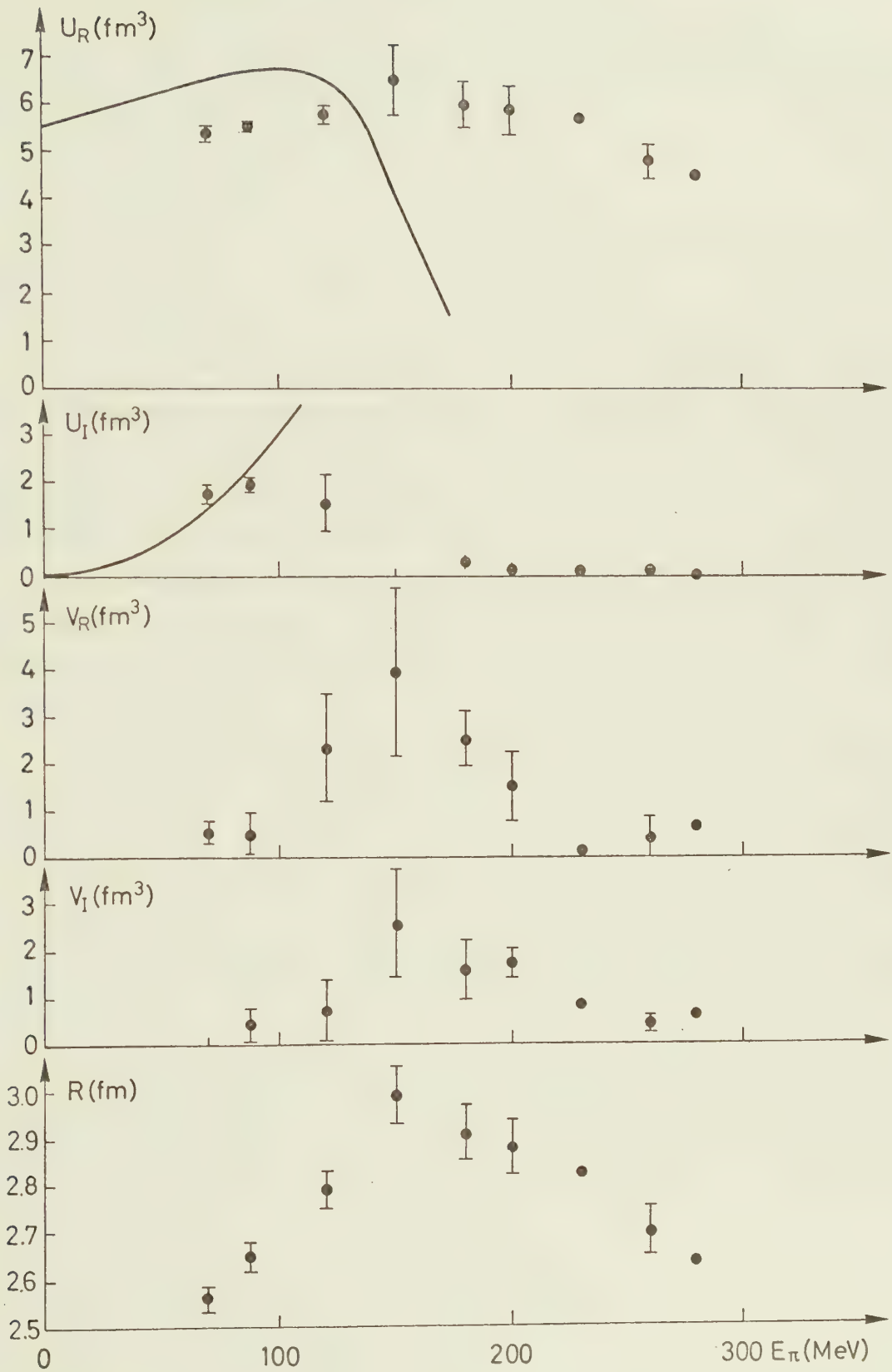
RESULTATS XV



RESULTATS XVI

Energie en MeV	R(F)	$U_R(F^3)$	$U_I(F^3)$	$V_R(F^3)$	$V_I(F^3)$
69.5	2.56 ± 0.03	5.39 ± 0.17	1.76 ± 0.13	0.54 ± 0.24	0.11 ± 0.08
87.5	2.65 ± 0.03	5.55 ± 0.10	1.95 ± 0.15	0.50 ± 0.45	0.43 ± 0.35
120	2.79 ± 0.04	5.80 ± 0.20	1.55 ± 0.60	2.35 ± 1.15	0.72 ± 0.65
150	2.99 ± 0.06	6.55 ± 0.75	0.07 ± 0.07	3.95 ± 1.80	2.58 ± 1.14
180	2.91 ± 0.06	6.03 ± 0.49	0.30 ± 0.16	2.53 ± 0.58	1.58 ± 0.65
200	2.88 ± 0.06	5.92 ± 0.50	0.14 ± 0.13	1.51 ± 0.73	1.71 ± 0.30
230	2.825 ± 0.010	5.72 ± 0.09	0.135 ± 0.06	0.125 ± 0.122	0.82 ± 0.03
260	2.70 ± 0.05	4.85 ± 0.35	0.16 ± 0.08	0.43 ± 0.43	0.43 ± 0.17
280	2.64	4.54	0.06	0.15	0.62

RESULTATS XVII



2. Comparaison avec d'autres résultats

Les valeurs U_R et U_I obtenues à partir des déphasages π -nucléon (voir Auerbach et références) sont données sous forme de courbes dans les derniers graphiques.

Les valeurs constantes

$V_R \sim -0,7 F^3$ et $V_I \sim +0,3 F^3$ prédites au-delà de 100 MeV ne sont pas indiquées.

Il apparaît tout d'abord que nos résultats sont en accord raisonnable avec les prévisions théoriques à basse énergie. A 69,5 et 87,5 MeV, nos résultats se distinguent des résultats de Auerbach par le fait que nous trouvons des valeurs $V_R > 0$, mais l'optimisation est peu sensible à ce paramètre qui reste faible en module et peut dépendre des détails du calcul (densité nucléaire, traitement du Coulombien ...). Les valeurs plus significatives trouvées pour U sont voisines dans les deux analyses. Auerbach utilise des densités Gaussiennes avec un rayon efficace $\sim 2,1$ Fermi, ce qui correspond à 2,7 Fermi pour le rayon de notre densité uniforme.

La comparaison avec les calculs de Huguenin⁽⁴⁹⁾ est également très satisfaisante. Bien qu'utilisant à la place de notre terme V local, un potentiel

$$V = V_1 \rho(r) + i V_2 (\rho(r))^2,$$

et une densité uniforme de rayon fixe ($R = 2,6$ Fermi), les valeurs calculées pour U et pour les déphasages coïncident remarquablement avec nos valeurs.

Nous pouvons donc considérer comme cohérent l'ensemble des résultats obtenus par différentes méthodes à 69,5 et 87,5 MeV, dans une région où la résonance π -nucléon ne se fait pas encore sentir.

A 120 et 150 MeV les résultats sont encore en accord acceptable avec les prévisions théoriques. Par exemple les valeurs de $\text{Re } f(0)$ sont correctes en ordre de grandeur et la courbe montre des variations comparables à celles de la courbe théorique (voir plus haut), ce qui est remarquable si on songe que nos points sont calculés à partir des sections efficaces différentielles obtenues pour des valeurs fixes de l'énergie, tandis que les points théoriques sont calculés à partir des sections efficaces totales pour l'ensemble des énergies entre 0 et l'infini. Un accord dans ces conditions ne peut être le fruit du hasard.

Le désaccord devient évident au-dessus de 150 MeV, où il est clair que les paramètres ne suivent pas les prévisions théoriques : U_R reste sensiblement constant, U_I s'annule. Enfin on observe dans notre paramétrisation une variation du rayon nucléaire dont le sens physique n'est pas évident.

Par ailleurs les déphasages tournent dans le mauvais sens par rapport à ce qu'on attendait, tandis que $\text{Re } f(0)$ reste positif et croît à nouveau après la résonance ce qui est en contradiction avec les prédictions de Ericson.

3. Application des relations de dispersion

Une des rares études théoriques concernant la diffusion π -noyau (et plus spécialement π -carbone) autour de la résonance est celle de Ericson et al⁽⁶⁰⁾ qui calculent

$\text{Re } f(0) \equiv \text{Re } T^+(\omega)$, en appliquant les relations de dispersion sous la forme (voir appendice VI).

$$\frac{\text{Re } T^+(\omega) - \text{Re } T^+(m)}{\omega^2 - m^2} = \frac{2}{\pi} \rho \int_m^\infty \frac{\text{Im } T^+(\omega') \omega' d\omega'}{(\omega'^2 - m^2)(\omega'^2 - \omega^2)} - \sum_S \frac{R_S \omega_S}{(\omega_S^2 - m^2)(\omega_S^2 - \omega^2)},$$

ω énergie totale des pions de masse m ,

ω_S position des pôles éventuels.

La méthode de calcul est la suivante :

a) Ericson et al admettent que les termes de pôles, dus aux états intermédiaires, sont équivalents dans la zone physique à un pôle unique situé à l'origine, et dont la contribution est négligeable ($\sim 10\%$ au seuil). Il ne reste plus que l'intégrale à calculer.

b) A cause de la nature composite du noyau, il y a des canaux ouverts au seuil $\omega' = m$ et $\text{Im } T^+(m) \neq 0$. Pratiquement on commence l'intégration à zéro en disant qu'à basse énergie

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \left((\eta_0 - 1) P_0 + 3 (\eta_1 - 1) P_1 + \dots \right) \\ \approx \frac{\delta_0}{k} + 3 \frac{\delta_1}{k} \rightarrow a_0 + 3 a_1 k^2 ,$$

où a_0 et a_1 sont les longueurs de diffusion en ondes s et p. Finalement

- pour $0 < \omega < m + 20 \text{ MeV}$, on prend

$$\text{Im } T^+(\omega) = \text{Im } a_0 + 3 \text{Im } a_1 \cdot k^2 \\ = -0,063 + 0,21 k^2 (m^{-1}) ,$$

valeurs tirées des études sur les atomes π -mésiques.

- pour $m + 20 < \omega < 1350 \text{ MeV}$, on calcule

$$\text{Im } T^+(\omega) = \frac{k}{4\pi} \sigma_T(\omega) \text{ par le théorème optique.}$$

- à haute énergie, les auteurs font une évaluation qui utilise le modèle de Glauber.

- la valeur à soustraire est

$$\text{Re } T^+(m) = \text{Re } a_0 = -0,26 (m^{-1}).$$

Ces hypothèses permettent de calculer simplement

$$\frac{\text{Re } T^+(\omega) - \text{Re } T^+(m)}{\omega^2 - m^2} = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\text{Im } T^+(\omega') \omega' d\omega'}{(\omega'^2 - m^2)(\omega'^2 - \omega^2)} .$$

L'intégrale se décompose en deux parties

$$\int_0^{\omega-\epsilon} < 0 \quad \text{et} \quad \int_{\omega+\epsilon}^\infty > 0 .$$

En admettant cette formulation, comme les valeurs de ω' très différentes de ω n'interviennent pratiquement pas dans le calcul, tout pic

important sur la courbe de section efficace totale se traduit par une partie réelle de l'amplitude qui s'annule pour $E \neq E_M$. Dans notre cas il est donc normal que Ericson trouve une partie réelle qui s'annule vers 180 MeV, mais ceci ne prouve pas qu'il s'agit de l'influence de la résonance. Car on sait bien qu'il existe des pics qui ne sont pas dus à des résonances (mais par exemple à l'existence d'un seuil de réaction) et pour lesquelles la partie réelle de l'amplitude n'a aucune raison de s'annuler.

Si on admet que les termes de pôles sont négligeables, rien ne permet d'expliquer la courbe différence :

valeurs de notre analyse - valeurs théoriques, qui a tout à fait l'allure d'une caractéristique de résonance de largeur finie.

D'autres traitements des relations de dispersion sont certainement possibles. A titre d'exemple, on peut signaler l'étude de Kimura et Nagashima ⁽⁶¹⁾ qui traitent la question de façon différente en partant de l'interaction élémentaire pion-nucléon et aboutissent à des conclusions également différentes.

Pour ces auteurs, il paraît essentiel de distinguer entre l'interaction pion-nucléon libres et l'interaction pion-nucléon dans la matière nucléaire, d'autant plus qu'on est près de la résonance où l'interaction en onde p est certainement sensible au voisinage des autres nucléons. Kimura et Nagashima pensent tenir compte de ces effets en appliquant le principe d'exclusion de Pauli suivant lequel les nucléons ne peuvent pas être projetés dans des états déjà occupés par d'autres nucléons. Leur conclusion est que la partie réelle de l'amplitude de diffusion ne s'annule pas à l'énergie de la résonance mais bien au-dessus vers 330 MeV.

4. Discussion

Avant toutes choses, il est nécessaire de rappeler quels sont les points faibles de notre expérience et de l'analyse des résultats.

a) En ce qui concerne l'expérience,

- nous manquons de points vers l'arrière et, lorsque nous en avons, la statistique est souvent médiocre,

- le dispositif expérimental n'est pas conçu pour l'étude des faibles angles et ne nous a pas permis d'étudier les interférences,

- la diffusion inélastique pour les niveaux lointains n'a pas été mesurée aux différentes énergies de réglage.

b) En ce qui concerne l'analyse,

- il est possible que les calculs ne nous aient pas toujours donné les solutions les plus intéressantes physiquement,

- notre modèle en puits carré est sans doute trop simpliste pour permettre une analyse détaillée des phénomènes,

- la forme du potentiel optique n'est vraisemblablement pas adaptée aux énergies voisines de la résonance ($\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$) pion-nucléon.

La plupart des critiques que l'on peut formuler sont en rapport avec le temps disponible.

Par exemple il ne sert à rien de posséder des programmes extrêmement sophistiqués si on ne dispose pas du temps nécessaire pour faire les calculs. Dans notre cas, avec l'ordinateur CDC 6600 du CERN, la recherche d'un minimum nécessitait ~ 1 minute de calcul et il fallait en moyenne ~ 200 minimums pour localiser la meilleure solution, ceci pour chaque énergie. On comprend à quel point le problème aurait été insurmontable si les approximations décrites n'avaient pas été faites.

En absence de toute théorie de l'interaction pion-noyau au voisinage de la résonance, nous avons adopté le modèle optique de Kisslinger avec des paramètres libres. Ce modèle optique, repris par Ericson, a été appliqué avec succès aux atomes π -mésiques et à la diffusion π -noyau à basse énergie, mais il n'a pas été conçu en fonction des phénomènes de résonance qu'il ignore totalement.[†]

Dans ces conditions il se peut que les résultats obtenus à haute énergie ne correspondent qu'à une représentation mathématique arbitraire. Cependant rien n'autorise à conclure aussi nettement et il importe d'examiner la question d'une façon assez critique.

En tout état de cause notre étude a conduit à un certain nombre de résultats, dont quelques uns sont suffisamment surprenants pour qu'on essaie de les confirmer expérimentalement et de les expliquer théoriquement.

[†] Becker étudie actuellement la possibilité d'introduire une forme de Breit et Wigner dans le potentiel.

Becker, Dedonder et Schmit étudient également un potentiel non-local, sous une forme générale ne correspondant pas à un développement limité, comme le potentiel de Kisslinger.

(Communications privées).

Le gonflement du rayon est un phénomène important qui peut s'interpréter en disant que le pion incident polarise le noyau et déforme les fonctions d'onde à sa surface, l'effet étant surtout sensible à l'énergie de la résonance.

La rotation des déphasages en sens inverse a été confirmée par Huguenin (communication privée) qui a fait une analyse en déphasages préliminaire de nos résultats.

Le problème qui se pose maintenant est de comprendre ce qui se passe dans un noyau complexe en présence de la résonance π -nucléon. Il ne faut pas s'attendre à observer une simple résonance π -noyau qui correspondrait à une onde stationnaire représentant un N^* non localisé, car il existe de nombreuses voies inélastiques offertes à cette particule parmi les nucléons. Par contre un N^* pourrait se transmettre de nucléon en nucléon suivant le processus d'échange

$N + N^* \rightarrow N^* + N$ analogue à l'échange des excitations photoniques de fluorescence, ce qui prolongerait la vie du N^* dans la matière nucléaire. On réalise le caractère fondamental d'un tel problème en physique nucléaire.

Sternheim (communication privée) a essayé d'analyser nos données avec un potentiel de Kisslinger et des paramètres calculés à partir des déphasages pion-nucléon libre, en tenant compte du mouvement de Fermi. Les courbes obtenues reproduisent convenablement les positions des maxima et minimums mais semblent fournir des valeurs de sections efficaces différentielles nettement trop basses, surtout lorsque les distributions sont très structurées. La valeur du χ^2 est parfaitement acceptable à basse énergie, devient ~ 100 à 120 MeV et atteint des valeurs ~ 1000 quand on approche de la résonance. Ceci semble bien confirmer que le traitement théorique actuellement admis est loin de convenir à l'étude de la diffusion dans cette gamme d'énergie.

Le désaccord le plus frappant entre nos résultats et les prévisions théoriques concerne $\text{Re } f(0)$ qui reste positif au lieu de devenir négatif au-delà de la résonance. En fait le signe que nous avons obtenu dans notre analyse provient vraisemblablement de la forme adoptée au départ pour le potentiel optique. Le potentiel de Kisslinger ne nous a pas permis de trouver des solutions pour lesquelles $\text{Re } f(0)$ est négatif, mais nous ne pouvons pas affirmer que d'autres hypothèses physiques conduiraient au même résultat. Par ailleurs une analyse en déphasages ne

peut pas fournir le signe de $\text{Re } f(0)$ puisque cette quantité n'intervient que par son carré dans la comparaison avec les sections efficaces différentielles expérimentales.

Nous pensons pouvoir résoudre le problème par une mesure directe de l'interférence C.N. En effet la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f_C^2 + |f_N|^2 + 2 f_C \text{Re } [f_N]$$

peut être sensiblement augmentée ou diminuée suivant le signe de $\text{Re}[f_N]$, dans la zone des faibles angles (6 à 8°) où les deux amplitudes sont du même ordre.

L'expérience, actuellement en préparation, sera faite en 1970 en utilisant le faisceau déjà décrit et des dispositifs de mesure sensiblement améliorés.

C O N C L U S I O N S

A. Appareillage

Les mesures de diffusion $\pi^{-12}\text{C}$ effectuées au synchrocyclotron de 600 MeV du CERN en 1967 et 1968 ont nécessité un effort important de conception technique. Il a fallu tout d'abord étudier une optique de sortie permettant d'amener les pions produits sur la cible interne de la machine jusqu'à la salle d'expérience, et fonctionnant sur toute la gamme d'énergie disponible dans les meilleures conditions possibles d'acceptance et de stigmatisme. Cette optique constitue une amélioration notable des conditions de travail avec les pions et a déjà servi à plusieurs expériences. On obtient $\sim 10^5 \pi^-/\text{sec}/\text{cm}^2/\text{MeV}$.

Nous décrivons plus spécialement dans ce mémoire le double spectromètre achromatique qui nous a permis de mesurer les sections efficaces de diffusion $\pi^{-12}\text{C}$ en séparant parfaitement, et pour la première fois, le niveau fondamental des niveaux excités à 4,4 MeV et 9,6 MeV. Les résultats obtenus ont montré qu'il était fondamental, en vue d'une interprétation théorique correcte, de dissocier entièrement les contributions élastique et inélastique (cette dernière peut être la plus importante à certains angles).

Nous avons montré (théoriquement et expérimentalement) qu'il est possible d'obtenir une résolution $\frac{\Delta p}{p} < 0,1 \%$ en introduisant dans l'optique des sextupôles qui compensent les aberrations du second ordre. Notre étude traite également des problèmes d'adaptation entre les différentes parties du faisceau et du rôle particulièrement important que joue la cible de mesure entre le monochromateur et l'analyseur.

Le double spectromètre, utilisé sans sextupôles au cours de cette expérience, avait une résolution $\frac{\Delta p}{p} < 1 \%$. La calibration au moyen d'une source α a donné le résultat prévu par les calculs avec une précision de 0,1 %. Les possibilités de l'ensemble du dispositif permettent des mesures précises de diffusion pion-noyau, entre 100 MeV et 300 MeV, dans une zone située autour de la résonance $(\frac{3}{2} \frac{3}{2})$ pion-nucléon.

B. Résultats expérimentaux

L'hodoscope en bout du double spectromètre permet de compter aussi bien les particules ayant subi une diffusion élastique ou une diffusion inélastique correspondant aux niveaux d'excitation de 4,4, 7,7, 9,6 MeV et au groupe T = 1 ~ 15 MeV. Nous exposons et discutons les corrections nécessaires au traitement des données brutes (désintégration en vol et contamination...).

Les courbes de sections efficaces différentielles présentent des variations particulièrement rapides au voisinage de la résonance. Une représentation remarquable de nos résultats de diffusion élastique est obtenue en fonction du transfert d'impulsion longitudinal où il semble que les minimums et maximums observables aux différentes énergies correspondent à des valeurs fixes de cette variable.

Afin de disposer de tous les éléments du problème, nous avons également déterminé les sections efficaces totales en utilisant la méthode classique par transmission. Les pions étaient triés par un détecteur Čerenkov DISC et les seules corrections notables provenaient des dimensions de la cible (absorption...). Dans ces conditions nous avons pu atteindre une précision de 1 %. Un résultat surprenant est la position du maximum vers 145 MeV, position que le faible recul du noyau ne suffit pas à expliquer.

L'ensemble des mesures permet de connaître les sections efficaces totales élastique et inélastique, dont le rapport $\sigma_E/\sigma_I \sim 0,6$ indique que le noyau n'est ni totalement absorbant, ni totalement réfléchissant. Un autre "sous-produit" intéressant est la section efficace différentielle à 0° avec conservation du pion, correspondant à tous les processus inélastiques où la particule incidente est réémise

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_I^\pi = \int_0^\infty \left(-\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}\right)_I^\pi dE.$$

Les valeurs obtenues pour cette grandeur aux énergies extrêmes de notre gamme de mesure correspondent à une distribution fortement piquée vers l'avant. Le minimum très bas à 155 MeV fait penser au contraire à une distribution beaucoup plus uniforme et à une absorption importante. Cette observation suggère la formation d'un état N^* ou d'un état résonnant π -noyau intermédiaire dans lequel la particule perd le souvenir de sa direction initiale.

compréhension des phénomènes nucléaires exige sans doute un formalisme mathématique mieux adapté. L'urgence de nouveaux travaux théoriques dans ce domaine se fait sentir.

Une des rares études théoriques concernant la diffusion π -noyau autour de la résonance est celle de Ericson qui calcule la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant par application des relations de dispersion (à partir des valeurs connues de σ_T). Le principe essentiel du calcul consiste à négliger l'influence des termes de pôles. Dans ces conditions Ericson montre que $\text{Re } f(0)$ doit s'annuler en changeant de signe à l'énergie de la résonance. Les valeurs obtenues par notre analyse sont en contradiction avec cette prévision puisqu'elles passent par un minimum mais restent positives dans toute notre gamme d'énergie.

Il est nécessaire de procéder à de nouvelles mesures pour arriver à une certitude en ce qui concerne le signe de $\text{Re } f(0)$. Nous pensons pouvoir conclure expérimentalement par une étude directe de l'interférence entre les termes Coulombien et nucléaire dans la zone des faibles angles où les deux amplitudes sont du même ordre de grandeur. L'expérience est actuellement en préparation : elle utilisera l'appareillage de l'expérience précédente sensiblement perfectionné.

A P P E N D I C E I

INFLUENCE DES ELEMENTS DE SYMETRIE ET D'ANTISYMETRIE DANS LES CHAMPS MAGNETIQUES. EFFETS DU 2ème ORDRE

A. Champ magnétique avec un plan de symétrie

Prenons le cas d'un aimant de déflexion horizontale.

Un tel aimant possède un plan de symétrie mécanique horizontal que nous désignerons par xOz , l'axe Oy étant vertical.

A cause de la polarité de l'aimant, le plan horizontal est en fait un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique c'est-à-dire que le changement de y et $-y$ ne fait pas varier H_y , tandis que H_x et H_z changent de signe.

Compte tenu des relations générales

$$\Delta \vec{H} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \text{ le développement au 2ème ordre}$$

des composantes peut alors s'écrire :

$$H_y = H_0 + x \frac{\partial H_y}{\partial x} + z \frac{\partial H_y}{\partial z} + xz \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} + \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{z^2 - y^2}{2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2},$$

$$H_x = y \frac{\partial H_y}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + zy \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z},$$

$$H_z = y \frac{\partial H_y}{\partial z} + xy \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} + zy \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}.$$

On voit que ces expressions font seulement intervenir les dérivées de H_y par rapport à x et z .

B. Action d'un aimant sur une particule : effets de bord

Nous admettons que le champ est uniforme à l'intérieur de l'aimant et qu'il s'annule sur une assez faible distance lorsqu'on s'éloigne de l'entrefer.

Les formules qui donnent la trajectoire d'une particule dans un champ uniforme sont bien connues et nous porterons notre attention sur les effets de bord qui se produisent dans la zone où les lignes de

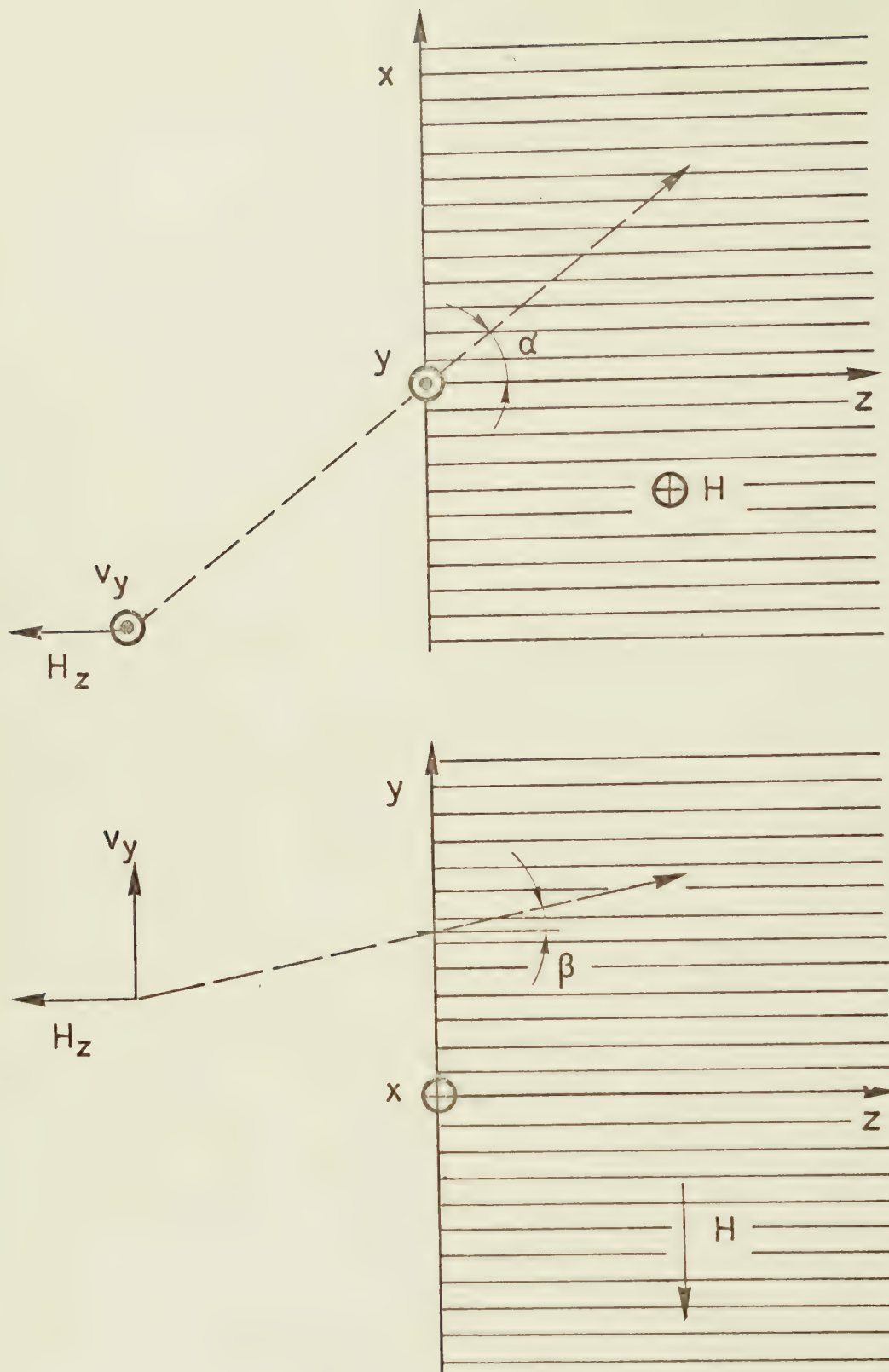


FIG. 66

force s'incurvent entre les pièces polaires.

Prenons un système d'axes tel que xOy représente localement la face d'entrée ou de sortie de l'aimant. Dans ces conditions la composante

$H_x = 0$ et la force appliquée est proportionnelle au vecteur

$$\vec{E} = \vec{i} (v_y H_z - v_z H_y) - \vec{j} v_x H_z + \vec{k} v_x H_y.$$

Nous étudierons tout d'abord les effets de la composante H_z sur le mouvement, en prenant une particule de charge $e < 0$ qui se déplace dans une direction voisine de Oz .

Soient α et β les angles entre Oz et les projections de la trajectoire, respectivement sur le plan horizontal xOz et sur le plan vertical yOz . Les angles seront pris > 0 dans le cas des figures.

1. Influence de H_z sur le mouvement en x (Figure 66)

Si la particule entre dans l'aimant, elle subit une déflexion horizontale

$$\Delta\alpha = - \frac{e}{mv} \operatorname{tg} \beta \int_{z_1}^{z_2} H_z dz.$$

L'intégrale étant prise entre des points 1 et 2 suffisamment éloignés du bord, on montre facilement que

$\Delta\alpha = + \frac{eH}{mv} y \operatorname{tg} \beta$, H étant la valeur du champ à l'intérieur de l'aimant.

En désignant par R le rayon de la trajectoire, il vient

$$\Delta\alpha = + \frac{\beta y}{R}.$$

Si la particule sort de l'aimant, on trouve

$$\Delta\alpha = - \frac{\beta y}{R}.$$

Nous observons ainsi une interaction qui rend le mouvement dans le plan horizontal dépendant du mouvement dans le plan vertical. Cet effet n'a pas lieu pour $y = 0$.

Tout se passe comme si on avait disposé deux lentilles minces de puissance $-\frac{\beta}{R}$ et $+\frac{\beta}{R}$, respectivement sur la face d'entrée et sur la face de sortie.

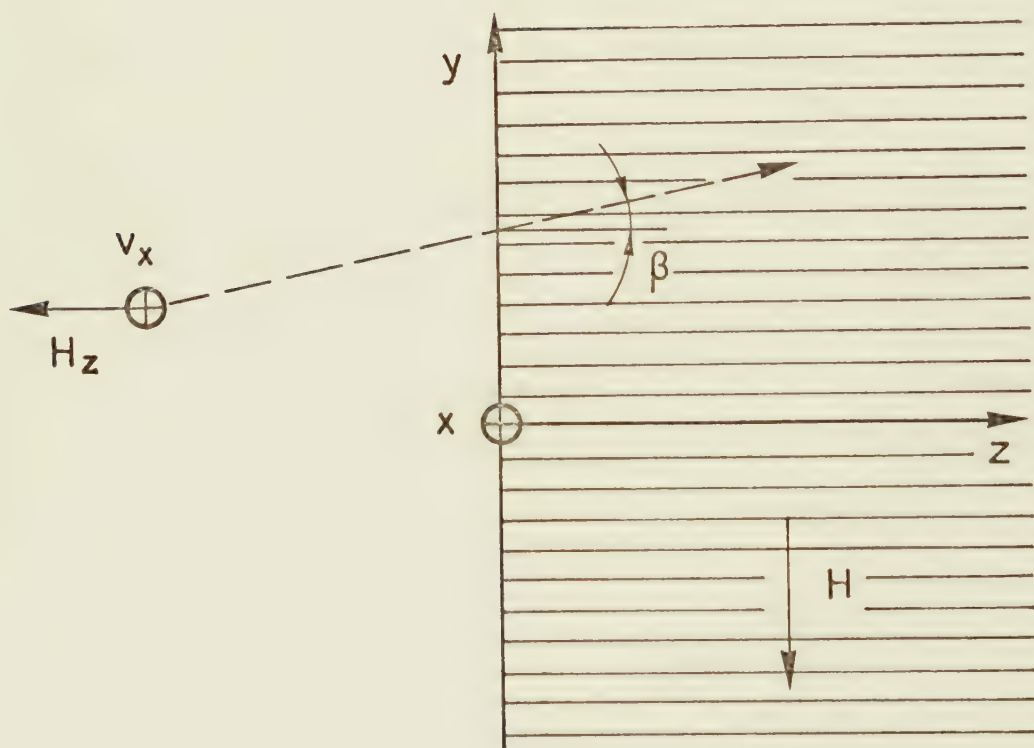
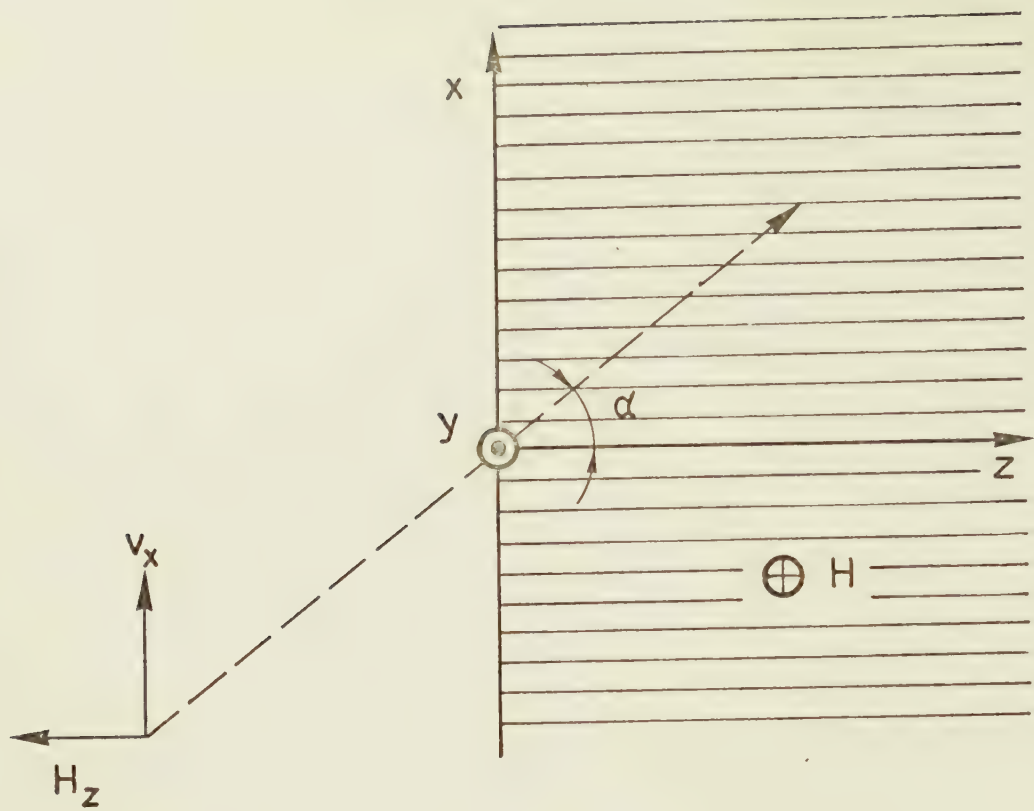


FIG. 67

2. Influence de H_z sur le mouvement en y (Figure 67)

Si la particule entre dans l'aimant, elle subit une déflexion verticale

$$\Delta\beta = + \frac{e}{mv} \quad \text{tg } \alpha \int_{z_1}^{z_2} H_z dz, \text{ soit}$$

$$\Delta\beta = - \frac{\alpha y}{R}.$$

Si la particule sort de l'aimant, on trouve

$$\Delta\beta = + \frac{\alpha y}{R}.$$

Nous observons ainsi une interaction qui rend le mouvement dans le plan vertical dépendant du mouvement dans le plan horizontal. Il faut noter les changements de signe par rapport au calcul précédent.

3. Influence de H_y

Avec le choix d'axes que nous avons fait au bord de l'aimant, l'expression de H_y se simplifie. Puisque $H_x = 0$ il faut écrire :

$$H_y = H_0 + z \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{z^2 - y^2}{2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}.$$

L'influence de H_y semble toutefois assez complexe à étudier car on ne voit pas a priori comment tenir compte de tous les termes de ce développement.

Un examen plus attentif des relations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = + \frac{e}{m} H_y \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{e}{m} H_y \frac{dx}{dt} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_0^2, \text{ montre cependant que la déviation}$$

$$\frac{dx}{dz} \text{ est fonction de } \int H_y dz \text{ seulement.}$$

Il suffit alors de calculer l'intégrale relative au terme du 1er ordre :

$$\int_{z_1}^{z_2} z \frac{\partial H_y}{\partial z} dz = \frac{z^2}{2} \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_{z_1}^{z_2} - \frac{z^3}{6} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \Big|_{z_1}^{z_2} + \dots = 0, \text{ pour}$$

montrer que seule la partie principale H_0 est à prendre en compte.

Le fait que le champ soit nul assez loin à l'extérieur et uniforme à l'intérieur, implique que l'étude des trajectoires, mis à part les

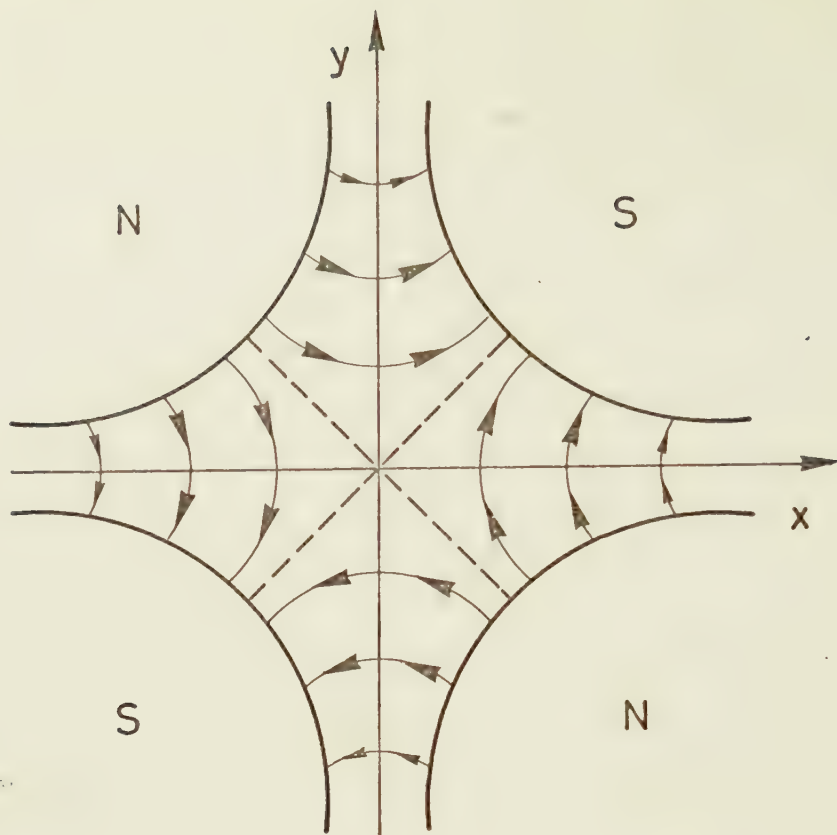


FIG. 68

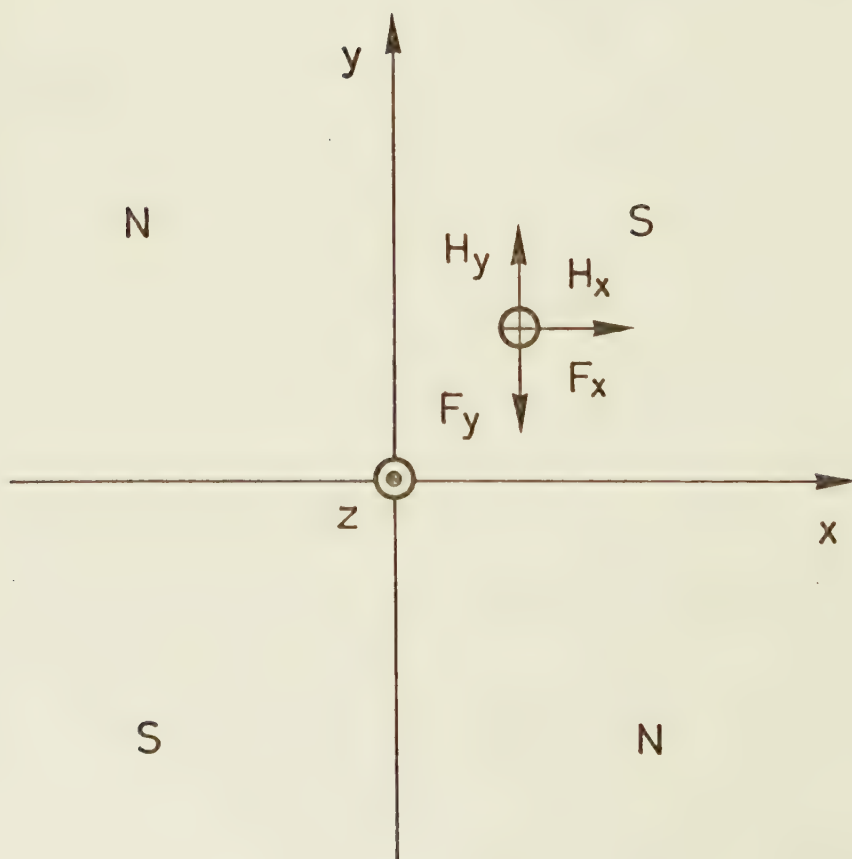


FIG. 69

effets traités dans les paragraphes 1 et 2, peut se faire dans le plan de symétrie xOz , en tenant compte uniquement de la carte de champ $H_0(x, z)$.

Le mouvement en y est indépendant et se poursuit comme si on franchissait un espace sans champ.

En première approximation, l'effet de bord produit par la composante verticale H_0 est équivalent à un élargissement d de la zone de champ uniforme.

d est de l'ordre de l'entrefer e et peut être défini par une relation du type.

$$\int_{-\infty}^e H_0 dz = H(d + e) .$$

Ainsi un secteur magnétique réel de longueur l peut être considéré comme équivalent à un secteur magnétique parfait de longueur $l + 2 d$ mesurable.

Les imperfections par rapport au modèle théorique peuvent encore être réduites par un "shimming" approprié à l'utilisation projetée de l'aimant.

C. Champ quadrupolaire

Une lentille quadrupolaire est constituée par une culasse bobinée à quatre pôles alternativement Nord et Sud. La Figure 68 donne une idée du système de lignes de force qui possède 3 plans de symétrie (xOy et les plans bissecteurs des pôles) et 2 plans d'antisymétrie (xOz et yOz).

Compte tenu de ces remarques, les composantes s'écrivent

$$H_y = x \frac{\partial H}{\partial x} + \text{terme en } x^3 ,$$

$$H_x = y \frac{\partial H}{\partial y} + \text{terme en } y^3 ,$$

$$H_z = 0 + \text{terme en } xyz .$$

1. Champ quadrupolaire idéal

C'est un champ pour lequel on a rigoureusement

$$H_y = Ax, \quad H_x = Ay \quad \text{et} \quad H_z = 0 .$$

On voit que dans une théorie où on se limite aux termes du 2ème ordre, on peut supposer qu'on a affaire à des champs quadrupolaires idéaux.

2. Action d'une lentille quadrupolaire

Supposons que la zone de champ soit comprise entre les plans $z = 0$ et $z = \ell$. Prenons le cas de la Figure 69 et considérons une particule de charge négative se déplaçant dans une direction voisine de Oz. Posons

$$\alpha = \frac{dx}{dz} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{dy}{dz}.$$

Mouvement en x :

Au bout du trajet ℓ , on a (ω étant une constante)

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \omega \ell & \frac{1}{\omega} \sinh \omega \ell \\ + \omega \sinh \omega \ell & \cosh \omega \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix},$$

le calcul étant fait sans autre approximation que celles déjà signalées. La matrice de transfert peut se décomposer en produits de matrices, suivant

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\omega} \operatorname{th} \frac{\omega \ell}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ + \omega \sinh \omega \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\omega} \operatorname{th} \frac{\omega \ell}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le quadrupôle est équivalent à une lentille mince comprise entre deux espaces libres. Comme en général

$\ell \neq \frac{2}{\omega} \operatorname{th} \frac{\omega \ell}{2}$, il vaut mieux se représenter le quadrupôle comme une lentille épaisse divergente de distance focale

$$f = -\frac{1}{\omega \sinh \omega \ell} \quad \text{et d'intervalle}$$

$$\lambda = \ell - \frac{2}{\omega} \operatorname{th} \frac{\omega \ell}{2}.$$

Mouvement en y :

Au bout du trajet ℓ , on a

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega \ell & \frac{1}{\omega} \sin \omega \ell \\ - \omega \sin \omega \ell & \cos \omega \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}.$$

Les conclusions sont analogues.

Le quadrupôle est équivalent à une lentille épaisse convergente de distance focale

$$f = +\frac{1}{\omega \sin \omega \ell} \quad \text{et d'intervalle} \quad \lambda = \ell - \frac{2}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega \ell}{2}.$$

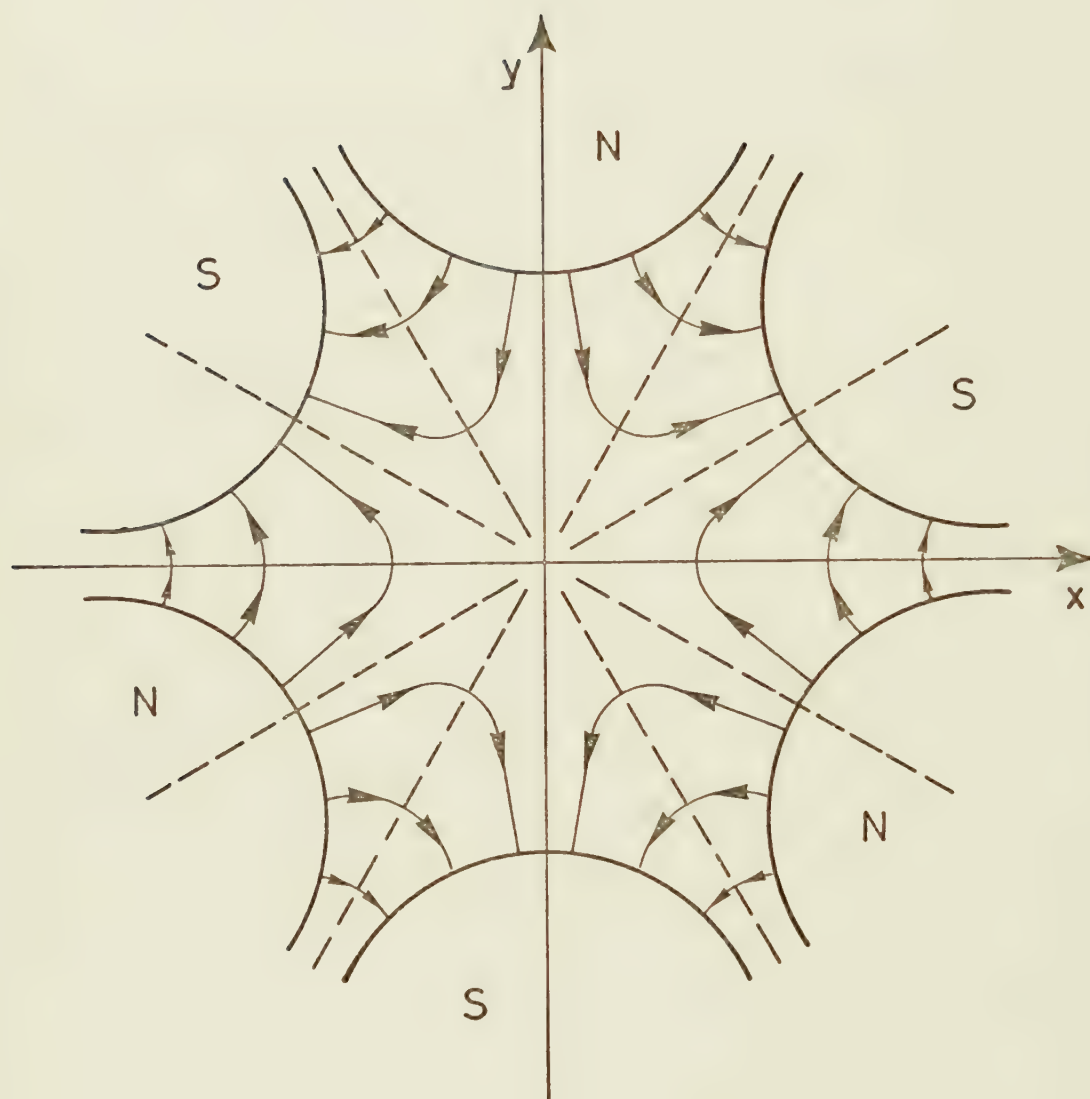


FIG. 70

Il faut noter la différence de comportement du quadrupôle pour ce qui est des mouvements dans le plan horizontal et dans le plan vertical (conservation de l'espace de phase).

3. Aberrations chromatiques des quadrupôles

Les calculs précédents font intervenir la quantité

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda \omega_0}{mv}}.$$

Lorsqu'on change la quantité de mouvement p , les puissances varient et les plans principaux se déplacent suivant les relations .

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} \left(1 + \frac{\omega \ell}{\tanh \omega \ell}\right) \quad \text{et}$$

$$\frac{\Delta(\lambda - \ell)}{\lambda - \ell} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} \left(1 - \frac{\omega \ell}{\sinh \omega \ell}\right) \quad \text{pour le plan horizontal,}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} \left(1 + \frac{\omega \ell}{\tanh \omega \ell}\right) \quad \text{et}$$

$$\frac{\Delta(\lambda - \ell)}{\lambda - \ell} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} \left(1 - \frac{\omega \ell}{\sin \omega \ell}\right) \quad \text{pour le plan vertical.}$$

Dans le cas où

$\omega \ell \neq 0$, on a

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta p}{p} \quad \text{et} \quad \lambda \equiv 0 \quad (\text{lentilles minces}).$$

Si on introduit ces variations dans les matrices de transfert, on obtient des termes d'aberrations chromatiques qui sont du 2ème ordre.

D. Champ sextupolaire

La Figure 70 donne une idée du système de lignes de force qui possède de nombreux éléments de symétrie.

Si on en tient compte, on trouve les expressions :

$$H_y = \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} y$$

+ termes du 4ème ordre,

$$H_x = xy - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} y$$

+ termes du 4ème ordre,

$$H_z = 0$$

+ terme en yz ($y^2 - 3x^2$).

1. Champ sextupolaire idéal

C'est un champ pour lequel on a rigoureusement

$$H_y = A(x^2 - y^2), \quad H_x = 2 A xy \quad \text{et} \quad H_z = 0.$$

On voit que dans une théorie où on se limite aux termes du 2ème ordre, on peut supposer qu'on a affaire à des champs sextupolaires idéaux.

2. Action d'une lentille sextupolaire

Supposons que la zone de champ soit comprise entre les plans $z = 0$ et $z = l$.

En cherchant une solution sous forme de séries, on montre facilement que

$$x_l = x_0 + \left(\frac{dx}{dz}\right)_0 l + \frac{\omega^2}{2} [x_0^2 - y_0^2] l^2 + \dots$$

$$y_l = y_0 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 l - \omega^2 x_0 y_0 l^2 + \dots$$

On voit que le sextupôle peut être considéré comme un dispositif sans épaisseur entre deux espaces libres de longueur $\frac{l}{2}$, le passage du "plan actif" se traduisant par des variations de pente :

$$\Delta\alpha = \omega^2 l (x^2 - y^2) = K (x^2 - y^2),$$

$$\Delta\beta = - 2 \omega^2 l x y = - 2 K x y.$$

3. Aberrations chromatiques des sextupôles

On introduirait les aberrations chromatiques en écrivant

$$\frac{\Delta K}{K} = - \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p}.$$

Dans le cadre de cette étude où on néglige les termes du 3ème ordre, il n'y a pas lieu de tenir compte du chromatisme des sextupôles.

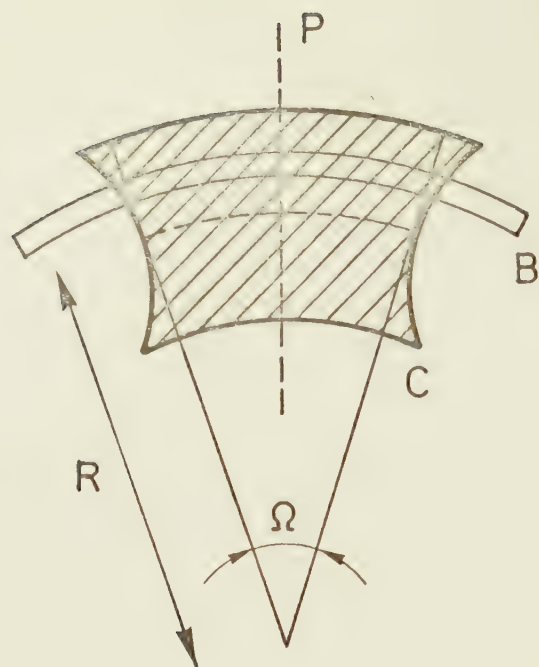


FIG. 71

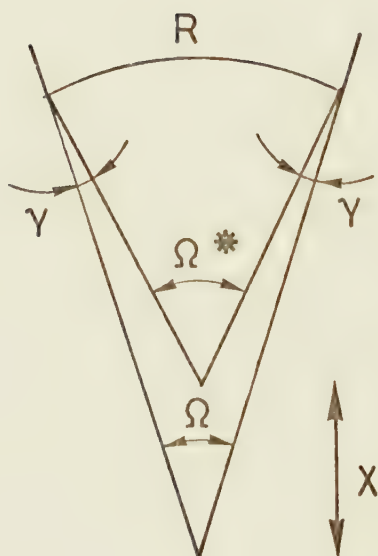


FIG. 72

A P P E N D I C E II

SHIMMING DES SECTEURS MAGNETIQUES

1. Angle de déflexion

On a choisi un angle moyen de 35°.

Une valeur plus faible conduit à un encombrement trop important du double spectromètre étant donné l'espace disponible. Une valeur plus forte aurait conduit à utiliser des champs trop intenses pour lesquels les aimants utilisés commencent à se saturer (au-dessus de 8.000 Gauss).

On sait que dans un secteur magnétique l'effet de bord dû au champ de fuite équivaut à un élargissement de la zone de champ uniforme. Pour un aimant donné, l'angle de déflexion étant fixé, le rayon de courbure est imposé par

$$R = \frac{\lambda + 2d}{2} = 1,58 \text{ m dans notre cas.}$$

2. Shimming (calage) des aimants

La carte de champ d'un aimant dans son plan de symétrie horizontal peut être modifiée en disposant des cales d'épaisseurs variables entre les pièces polaires, ce qui réduit l'entrefer, ou au bord des pièces polaires, ce qui augmente leur surface.

Le shimming de nos aimants a été réalisé de façon à se rapprocher autant que possible des caractéristiques du secteur magnétique parfait.

La méthode utilisée permet, sans modifier l'entrefer, de traiter l'aimant symétriquement par rapport à son plan bissecteur (Fig. 71).

On construit une bobine B ayant la forme d'un arc de cercle de rayon R et on la déplace dans le plan de symétrie horizontal et parallèlement à la direction P. Il faut disposer les cales C de façon à obtenir un flux qui varie suivant la loi désirée.

Dans notre cas, l'épaisseur maximale des cales est ~ 2 cm à une distance ~ 20 cm de la trajectoire moyenne.

Il est facile de voir (Figure 72) que pour un déplacement donné X, à partir de la position moyenne, l'arc découpé sur la bobine

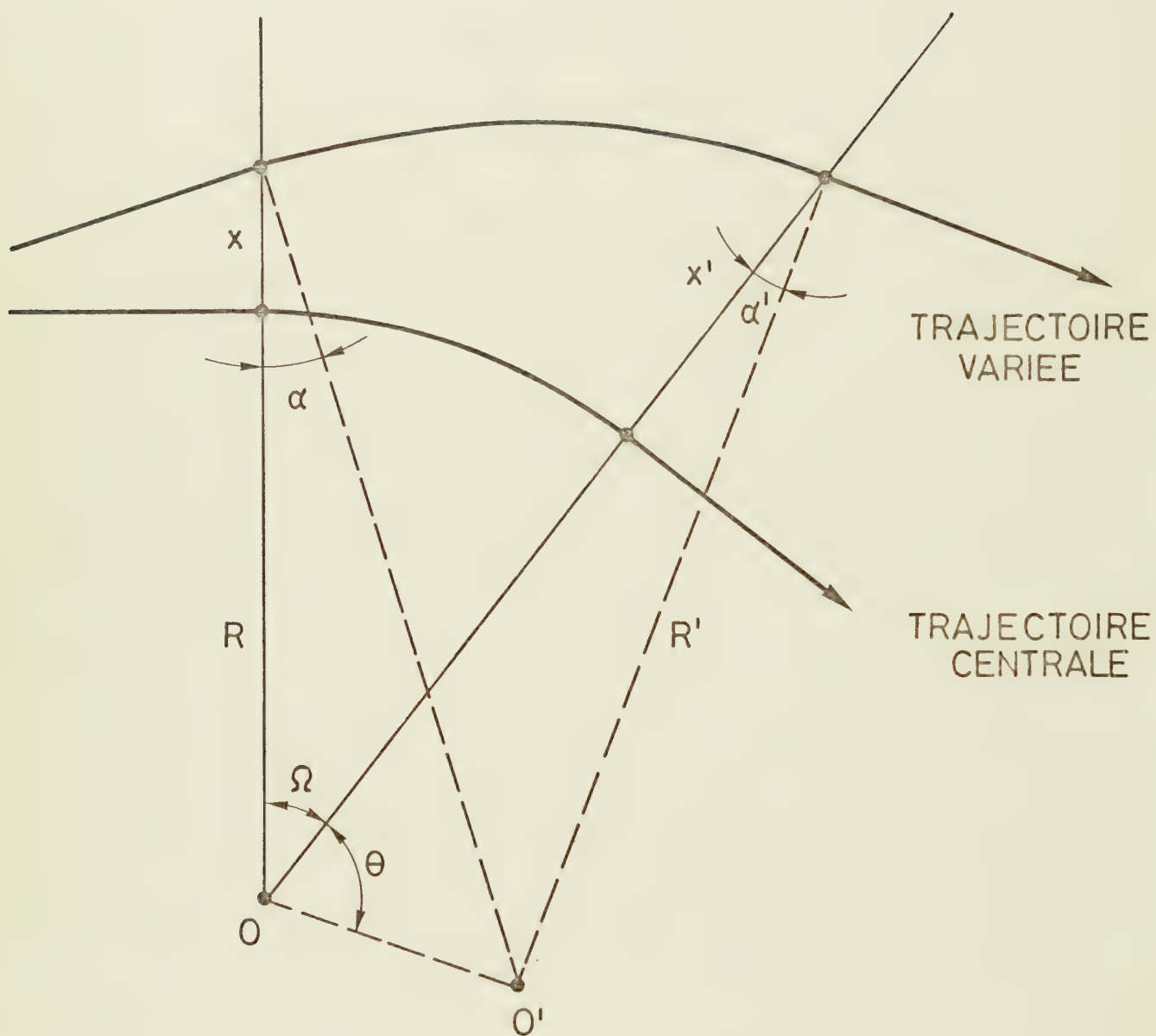


FIG. 73

doit être $\Omega^* = \Omega + 2 \gamma$
 $= \Omega + 2 \frac{X}{R} \sin \frac{\Omega}{2}.$

Le flux enregistré doit varier suivant une loi linéaire

$$\Phi = A + BX, \text{ avec}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{R\Omega}{2 \sin \frac{\Omega}{2}} = 1,605 \text{ m.}$$

Le calage a été réalisé de façon que cette loi soit vérifiée à 2/1000 près pour $- 10 \text{ cm} < X < + 10 \text{ cm}.$

Ceci justifie le fait que l'étude du double spectromètre ait pu être faite en détail en admettant que les aimants se comportent comme des secteurs magnétiques parfaits.

3. Contrôle des aimants

Le contrôle du champ est effectué par résonance magnétique nucléaire, au moyen d'une sonde placée en un point fixe de l'entrefer.

Pour les besoins de la manipulation il est essentiel que l'intégrale $\int B dS$ le long d'une trajectoire soit rigoureusement proportionnelle au champ B en un point fixe.

Cette loi a été vérifiée en laboratoire avec des écarts inférieurs à 2/1000 provenant vraisemblablement de l'évaluation de $\int B dS$ elle-même.

4. Formules du secteur magnétique au 2ème ordre

Prenons les notations de la Figure 73.

On peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{\overline{OO'}}{R'} \sin (\Omega + \theta) = \sin \alpha$$

$$\frac{\overline{OO'}}{R'} \cos (\Omega + \theta) = \frac{R + x}{R'} - \cos \alpha$$

$$\sin \alpha' = \frac{\overline{OO'}}{R'} \sin \theta = \sin (\Omega + \alpha) - \sin \Omega \frac{R + x}{R'} \quad (1),$$

$$\frac{R + x'}{R'} = \cos \alpha' + \frac{\overline{OO'}}{R'} \cos \theta$$

$$= \cos \alpha' - \cos (\Omega + \alpha) + \cos \Omega \frac{R + x}{R'} \quad (2).$$

Compte tenu de

$R' = R (1 + \frac{\Delta p}{p})$, on peut développer (1) et (2) ce qui donne au 2ème ordre :

A P P E N D I C E III

CHROMATISME D'UN TRIPLET SYMETRIQUE

1. Avantages d'un triplet symétrique sur un doublet

Supposons qu'on désire, à partir d'une source ponctuelle, obtenir une image ponctuelle. Il faut au minimum deux quadrupôles pour assurer à la fois la focalisation dans les plans horizontal et vertical.

Dans le cas d'un doublet l'expérience montre que le réglage est extrêmement critique, la variation d'un paramètre dans un plan entraînant une importante variation des paramètres dans l'autre plan. Si on considère le doublet comme équivalent à deux lentilles minces, la variation d'un courant fera varier à la fois les puissances de ces lentilles et leurs positions.

Un triplet symétrique est un triplet dont les quadrupôles extrêmes sont excités par le même courant. On a également deux courants à contrôler, mais le réglage est beaucoup moins critique. En admettant que le triplet soit équivalent à une lentille mince, la position de cette lentille est fixe et indépendante des courants par raison de symétrie. De plus le tracé des rayons montre que l'angle solide d'acceptance d'un triplet est plus grand que celui d'un doublet, et que les aberrations sont moindres.

2. Etude d'un système de quadrupôles

Le calcul des trajectoires dans un système de quadrupôles se fait généralement sur ordinateur. Nous avons étudié les focalisations horizontale et verticale en posant respectivement :

F ou F' : distance focale du triplet

H ou H' : position des plans principaux (Voir Figure 74),

$$a = \frac{\Delta F/F}{\Delta p/p} \quad \text{ou} \quad a' = \frac{\Delta F'/F'}{\Delta p/p} \quad \text{et}$$

$$b = \frac{\Delta H/H}{\Delta p/p} \quad \text{ou} \quad b' = \frac{\Delta H'/H'}{\Delta p/p} \quad \text{coefficients de chromatisme.}$$

Les valeurs numériques de ces paramètres, obtenues par le programme TRAMP avec le calculateur CDC 6600 du C.E.R.N., sont données par le

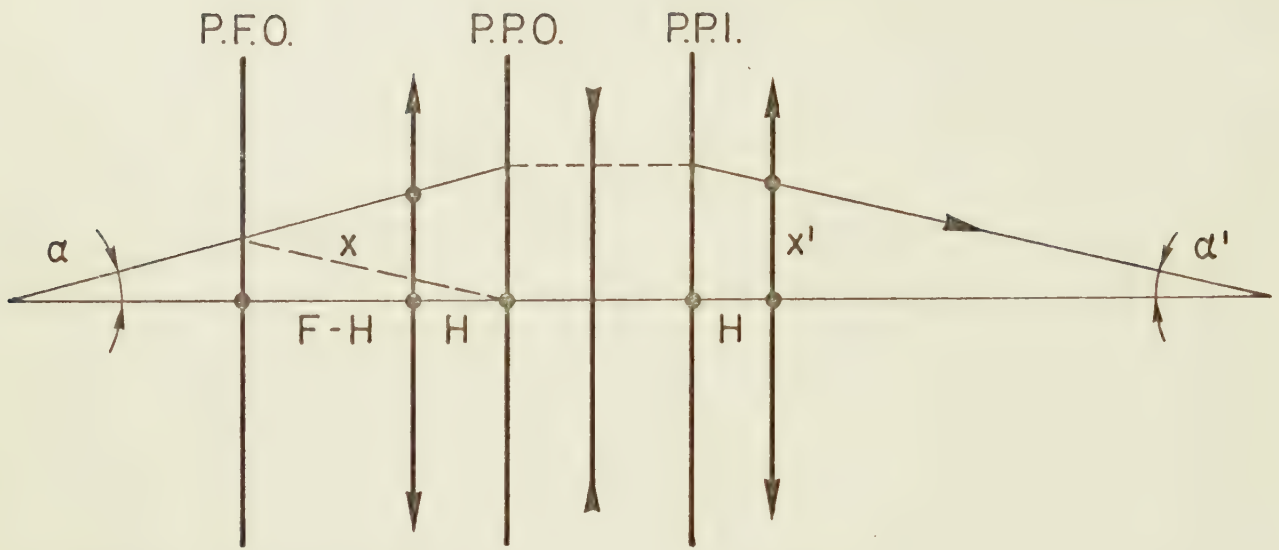


FIG. 74

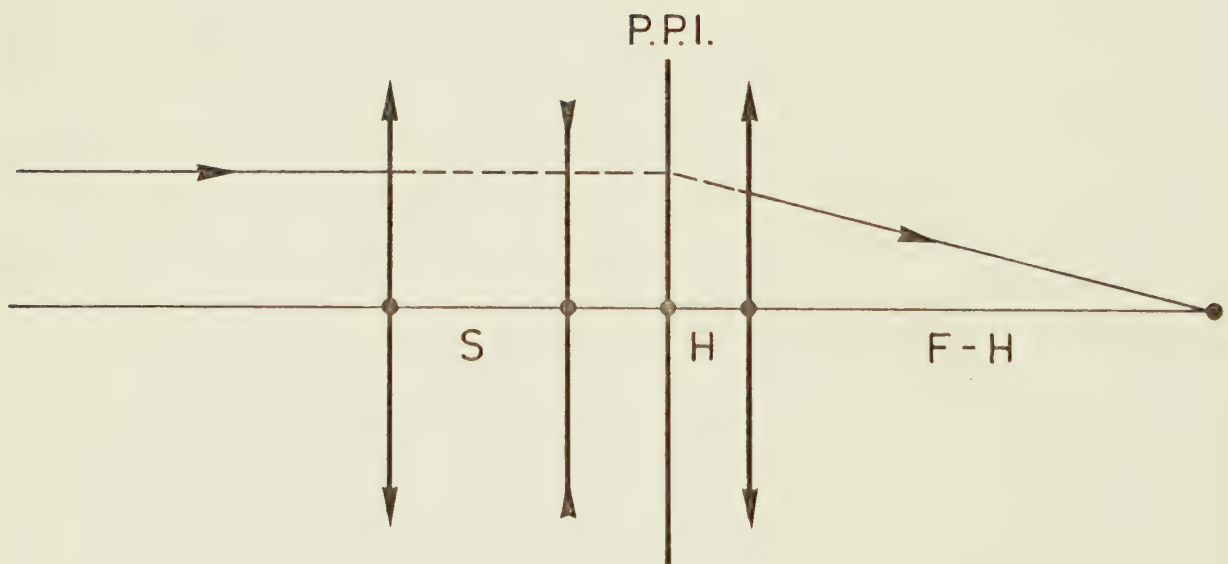


FIG. 75

Tableau suivant, pour le monochromateur (M) et l'analyseur (A):

M	A	M	A
F = 315,6,	275,5	F' = 164,3,	142,7
H = 96,9,	103,9	H' = 30,7,	35,5
a = +1,25,	+1,10	a' = +2,40,	+2,47
b = -0,71,	-0,83	b' = +0,37,	+0,38

3. Matrices de transfert

Pour notre spectromètre les triplets sont dans l'état FDF dans le plan horizontal et DFD dans le plan vertical.

Etudions par exemple la focalisation des trajectoires dans le plan horizontal.

Si on prend x, α et x', α' à l'entrée et à la sortie du triplet respectivement, on trouve

$$\alpha' = -\frac{x}{F} + \alpha \frac{F-H}{F} \quad \text{et}$$

$$x' = x \frac{F-H}{F} + \alpha \frac{H}{F} (2F-H).$$

En tenant compte du chromatisme, il vient

$$\alpha' = -\frac{x}{F} + \alpha \frac{F-H}{F} + \frac{x}{F} \frac{\Delta p}{p} a + \alpha \frac{\Delta p}{p} \frac{H}{F} (a-b)$$

$$x' = x \frac{F-H}{F} + \alpha \frac{H}{F} (2F-H) + x \frac{\Delta p}{p} \frac{H}{F} (a-b) + \alpha \frac{\Delta p}{p} \frac{H^2}{F} (a + 2b \frac{F-H}{H})$$

Les mêmes formules permettent d'étudier la focalisation verticale en remplaçant FHaB par F'H'a'b'.

Remarque : La conservation de l'espace de phase exige que le Jacobin de la transformation soit unitaire, ce qui est facile à vérifier (en se limitant au 1er ordre).

4. Calcul approché des variations chromatiques

Un calcul approché peut être effectué en remplaçant les quadripôles par des lentilles minces.

Faisons l'étude dans le plan horizontal en appelant $+f, -\phi, +f$ les distances focales des lentilles et S leur espacement (Fig. 75).

On trouve :

$$H = \frac{Sf}{f - S} \quad \text{et} \quad F = \frac{\phi f^2}{(S + 2\phi - f)(f - S)}$$

On peut différencier et faire dans les formules

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{\Delta F}{F} . \quad \text{Il vient alors :}$$

$$a = 3 - 2 \frac{H}{S} + 2 \frac{F}{H} \frac{(H - S)^2}{HS}, \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &\neq 3 - \frac{H}{S} \\ b &= 1 - \frac{H}{S} \end{aligned}}$$

dans le cas pratique où $f \sim 2\phi$, et

sans approximation.

Dans le plan vertical les formules finales restent les mêmes.

Pour les calculs il faut remplacer f par $-f$ et ϕ par $-\phi$.

Cette méthode donne les résultats suivants :

	M	A		M	A
$a =$	$+ 1,24,$	$+ 1,11$	$a' =$	$+ 2,33,$	$+ 2,36$
$b =$	$- 0,76,$	$- 0,89$	$b' =$	$- 0,33,$	$- 0,36$

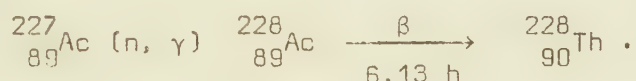
A P P E N D I C E IV

ETUDE EXPERIMENTALE DU FONCTIONNEMENT DE L'ANALYSEUR

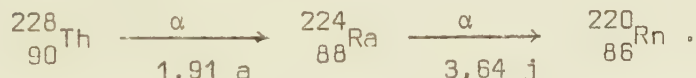
A. Préparation de la source

On utilise la technique des dépôts actifs classique en spectrométrie α .

La source mère est une source de $^{228}_{90}\text{Th}$ de 10 mC, préparée à partir de $^{227}_{89}\text{Ac}$ par la réaction



Le $^{228}_{90}\text{Th}$ est en équilibre séculaire avec le $^{224}_{88}\text{Ra}$. On obtient le gaz Thoron par les désintégrations



La source secondaire est portée à un potentiel négatif pour capter les noyaux de Thoron. C'est un fil d'or de 0,5 mm de diamètre et de 10 mm de long, planté comme une agrafe dans un domino en téflon et mis à quelques mm de la source mère sous une tension de plus de 1000 Volts pendant 1 heure environ.

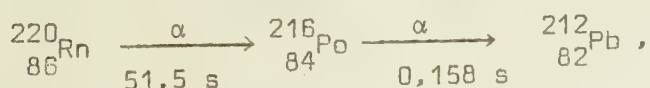
L'opération a lieu dans une boîte à gants en dépression, sous atmosphère d'Argon et dans des conditions hygrométriques convenables.

Avant l'exposition, le fil est nettoyé à l'abrasif, à l'acide nitrique, à l'eau, au teepol, à l'eau, puis mis sous vide une demi-heure.

Après l'exposition, pour éliminer les ions captés (beaucoup plus nombreux que les atomes radioactifs) la source est laissée au moins 1 heure sous vide. L'intensité maximale est atteinte après 3 heures environ.

La filiation est la suivante :

Au bout de peu de temps le Thoron donne du $^{212}_{82}\text{Pb}$



dont la période relativement longue commande le rythme de production des nuclides suivants



Si le temps d'exposition n'a pas été trop long on peut supposer en première approximation que la filiation démarre au temps $t=0$ avec uniquement des atomes de ${}^{212}_{82}\text{Pb}$, soit N_{10} atomes.

Soient N_1 le nombre d'atomes de Plomb et N_2 le nombre d'atomes de Bismuth au temps t . On a

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad \lambda_1 = \frac{0,693}{T_1} = 0,000018164,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \quad \lambda_2 = \frac{0,693}{T_2} = 0,00019095,$$

et comme la désintégration de ${}^{212}_{84}\text{Po}$ est immédiate, l'intensité de la source vaut (seuls comptent les α de 8,785 MeV).

$$I = \tau \lambda_2 N_2 \quad (\tau = 0,64).$$

On trouve alors

$$I = \tau N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right].$$

On obtient un maximum au bout du temps

$$t_M = \frac{\text{Log } \lambda_2 - \text{Log } \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 3 \text{ heures } 47 \text{ minutes.}$$

Il est normal qu'on observe un temps légèrement plus court étant données nos hypothèses.

Au bout de quelques heures on a sensiblement

$$I = I_0 e^{-\lambda_1 t}, \text{ et on doit appliquer une correction aux}$$

mesures. Pour 1 minute par exemple

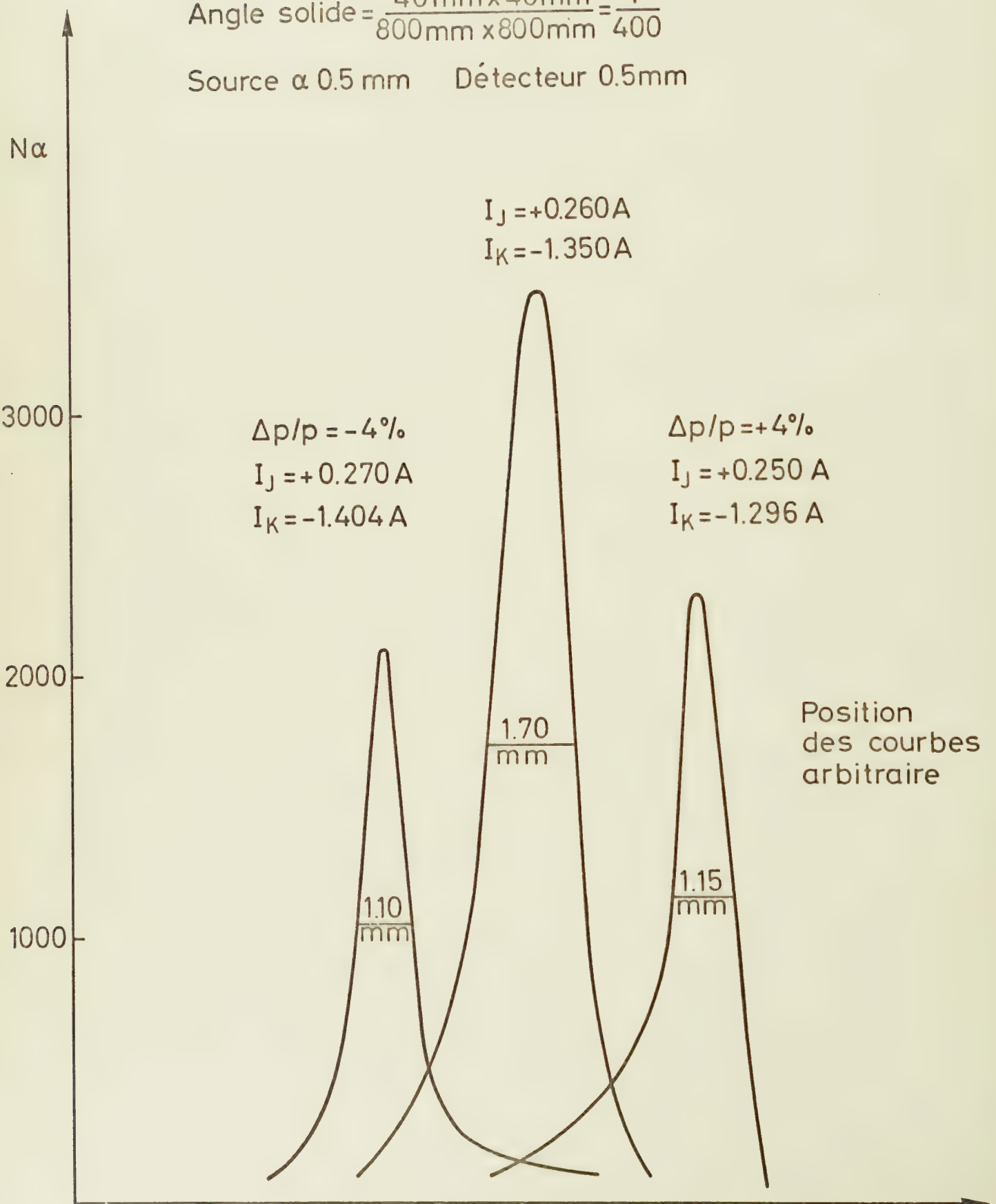
$$\frac{I_0 - I}{I_0} \neq \frac{0,693 \times 60}{38160} = \frac{1}{1000}.$$

FIGURE 76

REGLAGE DE L'ANALYSEUR (DEUX SEXTUPOLES)

$$\text{Angle solide} = \frac{40\text{ mm} \times 40\text{ mm}}{800\text{ mm} \times 800\text{ mm}} = \frac{1}{400}$$

Source α 0.5 mm Détecteur 0.5 mm



B. Manipulation

Nous donnons seulement un bref compte rendu de cette étude expérimentale (Voir également chapitre II).

- La source est au centre. On dispose de détecteurs solides pouvant explorer horizontalement et verticalement dans un plan normal à l'axe et situé à une distance F du centre de l'aimant, au bout du spectromètre. On met en place un diaphragme correspondant à la moitié de l'acceptance normalement prévue.

- On règle l'aimant et les lentilles de façon à obtenir une image convenable sur l'axe. On joue sur les sextupôles J et K et on cherche une relation entre leurs courants qui donne la meilleure résolution. On obtient une droite qui correspond à la condition $C_{0,2} = 0$.

En respectant cette condition on cherche un réglage tel que l'image reste correcte dans le plan d'exploration lorsqu'on fait varier les courants dans l'aimant et les lentilles de $\pm$ quelques %. Ce réglage doit satisfaire la relation $C_{\alpha\Delta p} = 0$.

- On reprend avec soin le réglage des lentilles en cherchant les conditions de meilleure focalisation horizontale puis verticale. On obtient deux relations linéaires entre les courants dans les lentilles et on cherche encore à optimiser autour du point d'intersection.

On recommence à jouer sur les sextupôles, on retouche aux lentilles ... On arrive finalement à un réglage où la résolution reste de l'ordre de $1/1000$ (1,58 mm à mi-hauteur) lorsqu'on fait varier les champs (ce qui revient à faire varier la quantité de mouvement) de ± 4 %. Ce réglage (Voir Figure 76) correspond aux courants :

$$I_J = + 0,26 \text{ amp}, \quad I_K = - 1,35 \text{ Amp.}$$

- On laisse I_K fixe et on met en marche le sextupôle I. On fait varier les courants dans I et J en cherchant une bonne résolution. On trouve une relation linéaire correspondant à la condition $C_{\alpha 2} = 0$.

- On supprime le diaphragme.

En suivant la droite obtenue précédemment on cherche un réglage qui donne encore de bonnes images lorsqu'on déplace la source de $\pm x_0$ perpendiculairement à l'axe. On satisfait alors la relation $C_{\alpha\delta}^* = 0$.

On fige tous les réglages de façon à obtenir de bons résultats lorsqu'on produit des variations de ± 4 % sur les champs et

simultanément des déplacements de source de ± 4 cm (conditions bien plus dures que les conditions normales de fonctionnement). On obtient des résolutions de l'ordre de $1/1000$ avec les courants suivants :

$$\left. \begin{array}{l} I_I = - 0,85 \text{ Amp.} \\ I_J = + 0,40 \text{ Amp.} \\ I_K = - 1,35 \text{ Amp.} \end{array} \right\} \quad (\text{pour } p = 128,05 \text{ MeV/c})$$

- Pour finir on déplace la source dans des directions faisant $\pm 45^\circ$ avec l'axe pour simuler une rotation de cible. On constate que le sextupôle J ne doit pas varier sensiblement. En laissant son courant fixe on est conduit à prendre

$$\begin{array}{ll} I_I = -0,75 \text{ Amp.} & \text{pour } \Phi = + 45^\circ, \\ I_I = - 0,95 \text{ Amp.} & \text{pour } \Phi = - 45^\circ. \end{array}$$

C. Comparaison avec les prévisions théoriques

L'étude magnétique des sextupôles a donné les résultats suivants :

- Pour I_{ANAL} ou I_{MONO} ,

$$\int B_y dz = 97 I x^2 \quad , \text{ d'où}$$

Gaussxcm A cm

$$\Delta\alpha = \frac{e}{p} \int B_y dz = 0,029 \frac{I_{\text{Amp}} x_{\text{cm}}^2}{p(\text{MeV/c})} .$$

- Pour $J_{\text{ANAL}}, K_{\text{ANAL}}$ ou $J_{\text{MONO}}, K_{\text{MONO}}$,

$$\int B_y dz = 73 I x^2 \quad , \text{ d'où}$$

Gaussxcm A cm

$$\Delta\alpha = \frac{e}{p} \int B_y dz = 0,022 \frac{I_{\text{Amp}} x_{\text{cm}}^2}{p(\text{MeV/c})} .$$

On peut donc calculer les courants théoriques.

$$\left\{ \begin{array}{l} K = - 2,024 \cdot 10^{-4} \text{ correspond à} \\ I_K = - \frac{2,024 \times 128}{220} = - 1,18 \text{ Amp } (-1,35). \end{array} \right.$$

La meilleure solution avec $I = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \frac{1047,5}{20900000} = + 0,5012 \cdot 10^{-4} \text{ soit} \\ I_J = + \frac{0,5012 \times 128}{220} = + 0,29 \text{ Amp } (+ 0,26). \end{array} \right.$$

La meilleure solution avec $I \neq 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} J = + 0,7699 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \\ I = - 2,672 \cdot 10^{-4} \quad \text{soit} \\ I_J = + \frac{0,7699 \times 128}{220} = + 0,45 \text{ Amp } (+ 0,40) \quad \text{et} \\ I_I = - \frac{2,672 \times 128}{290} = - 1,19 \text{ Amp } (-0,85). \end{array} \right.$$

Il faut insister sur le fait que, dans la zone d'aberration minimale, les variations des courants de sextupôles sont assez insensibles. Par ailleurs, dans la plupart des mesures, nous avons dû travailler avec des détecteurs solides de 2 mm de largeur, ce qui correspond déjà à un défaut de résolution au 1er ordre de 0,5/1000 ne facilitant pas la recherche d'un minimum équivalent sur les termes du 2ème ordre. Dans ces conditions il est possible que les valeurs expérimentales dépendent quelque peu de la méthode suivie.

Malgré tout, les réglages obtenus confirment quantitativement nos calculs. Ce résultat très satisfaisant prouve qu'il est possible par une analyse simple sans ordinateur d'étudier en détail la fonctionnement d'un transport de faisceau comportant plusieurs paramètres.

A P P E N D I C E V

DIFFUSION PAR UN POTENTIEL CENTRAL

A. Développements en ondes sphériques

La méthode consiste à développer les fonctions d'onde en polynômes de Legendre.

Pour l'équation de Schrödinger sans potentiel

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = 0, \text{ on pose}^*$$

$$\psi(\vec{r}) = \sum a_\ell f_\ell(r) P_\ell(\cos \theta) \quad \text{et on trouve}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (r f_\ell) + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] (r f_\ell) = 0.$$

On en déduit le comportement asymptotique

$$f_\ell(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2 i k r} \left[- e^{-i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} + e^{i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} \right].$$

Pour l'équation de Schrödinger avec potentiel

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + [k^2 - U(r)] \Psi(\vec{r}) = 0, \text{ on pose}$$

$$\Psi(\vec{r}) = \sum A_\ell F_\ell(r) P_\ell(\cos \theta) \quad \text{et on trouve}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (r F_\ell) + \left[k^2 - U - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] (r F_\ell) = 0.$$

On en déduit le comportement asymptotique

$$F_\ell(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2 i k r} \left[- e^{-i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} + D_\ell e^{i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} \right].$$

On remarque que le potentiel ne modifie pas les ondes sphériques incidentes mais affecte les ondes sphériques diffusées.

$$|D_\ell| = 1 \quad \text{pour une diffusion élastique,}$$

$$|D_\ell| < 1 \quad \text{pour une diffusion inélastique.}$$

* Dans ce cas particulier la solution est

$$e^{i \vec{k} \vec{r}} = \sum (2\ell + 1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta).$$

La notation classique

$D_l = e^{2i\delta_l}$ fait apparaître les déphasages.

La solution doit être de la forme (pour $r \rightarrow \infty$).

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta).$$

Il est facile de voir que l'existence d'une telle solution implique la condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r U(r)] = 0, \quad \text{ce qui élimine pour l'instant le cas}$$

particulier du potentiel Coulombien. Nous supposons qu'on a affaire à un potentiel nucléaire de courte portée.

La fonction d'onde comporte deux termes :

- une onde plane incidente $e^{i\vec{k}\vec{r}}$
de densité de courant* $\frac{\hbar \vec{k}}{m}$,
- une onde sphérique diffusée $\frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta)$
de densité de courant* $\frac{\hbar \vec{k}}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2$.

On reconnaît la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2.$$

On peut procéder à l'identification

$$\begin{aligned} \sum \frac{A_l}{2 ikr} \left[- e^{-i(kr-l\frac{\pi}{2})} + D_l e^{i(kr-l\frac{\pi}{2})} \right] P_l(\cos \theta) = \\ \sum \frac{(2l+1)i}{2 ikr} \left[- e^{-i(kr-l\frac{\pi}{2})} + e^{i(kr-l\frac{\pi}{2})} \right] P_l(\cos \theta) \\ + \frac{1}{r} e^{ikr} \sum C_l P_l(\cos \theta). \quad \text{Il vient} \end{aligned}$$

$$A_l = (2l+1) i^l \quad \text{et}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2 i k} \sum (2l+1)(D_l - 1) P_l(\cos \theta).$$

En plus des sections efficaces différentielles, on peut calculer

* La définition de la densité de courant est

$$\frac{\hbar}{2im} [\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*].$$

- la section efficace totale élastique

$$\begin{aligned}\sigma_E &= 2 \pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1)^2 |D_\ell - 1|^2 \int_{-1}^{+1} [P_\ell(\cos\theta)]^2 d(\cos\theta) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) |D_\ell - 1|^2.\end{aligned}$$

- la section efficace totale inélastique*

$$\begin{aligned}\sigma_I &= 2 \pi \int_0^\pi \sum \frac{A_\ell^2}{4 k^2} (1 - |D_\ell|^2) [P_\ell(\cos\theta)]^2 \sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2k^2} \sum (2\ell + 1)^2 (1 - |D_\ell|^2) \int_{-1}^{+1} [P_\ell(\cos\theta)]^2 d(\cos\theta) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) (1 - |D_\ell|^2).\end{aligned}$$

- la section efficace totale

$$\sigma_T = \sigma_E + \sigma_I = \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) (2 - D_\ell - D_\ell^*).$$

Finalement, on remarque que

$$\sigma_T = \frac{4 \pi}{k} I_m [f(0)], \text{ expression dite du "Théorème optique".}$$

B. Approximation de Born

Le problème essentiel qui se pose maintenant est de relier les déphasages δ_ℓ et l'amplitude $f(\theta)$ à la forme du potentiel diffuseur.

L'approximation de Born consiste à admettre que

$$U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \ll \frac{2m}{\hbar^2} E = k^2.$$

On peut alors utiliser une méthode de perturbation.

Soient

$$\phi_\ell(r) = kr f_\ell(r) \quad \text{et} \quad \Phi_\ell(r) = kr F_\ell(r)$$

satisfaisant les conditions

* Il faut faire la différence entre les flux des ondes sphériques entrantes et sortantes car la fonction d'onde ne représente que les particules diffusées élastiquement.

$$\frac{d^2 \phi_\ell}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \phi_\ell = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2 \Phi_\ell}{dr^2} + \left[k^2 - U - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \Phi_\ell = 0$$

Posons $\Phi_\ell(r) = \phi_\ell(r) [1 + \epsilon_\ell(r)]$.

En utilisant les deux équations différentielles, on trouve

$$2 \phi_\ell' \epsilon_\ell' + \phi_\ell \epsilon_\ell'' = U \phi_\ell (1 + \epsilon_\ell) \quad \text{ou encore}$$

$$[\phi_\ell^2 \epsilon_\ell']' = U \phi_\ell^2 (1 + \epsilon_\ell) \neq U \phi_\ell^2.$$

Il vient alors :

$$\epsilon_\ell' = \frac{1}{\phi_\ell^2} \int_0^r U \phi_\ell^2 dr \rightarrow \frac{1}{\sin^2(kr - \ell \frac{\pi}{2})} \int_0^\infty U \phi_\ell^2 dr,$$

$$\epsilon_\ell = - \left[\frac{1}{\tan(kr - \ell \frac{\pi}{2})} + \alpha \right] \frac{1}{k} \int_0^\infty U \phi_\ell^2 dr \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \Phi_\ell &= \sin(kr - \ell \frac{\pi}{2}) \\ &- [\cos(kr - \ell \frac{\pi}{2}) + \alpha \sin(kr - \ell \frac{\pi}{2})] \frac{1}{k} \int_0^\infty U \phi_\ell^2 dr. \end{aligned}$$

On peut identifier avec

$$\Phi_\ell = e^{i\delta_\ell} \sin(kr - \ell \frac{\pi}{2} + \delta_\ell) \quad \text{et on trouve}$$

$$\sin \delta_\ell \neq \delta_\ell = - \frac{1}{k} \int_0^\infty U \phi_\ell^2 dr.$$

Dans ces conditions on a

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{k} \sum (2\ell + 1) \delta_\ell P_\ell(\cos \theta) \\ &= - \int_0^\infty U(r) \left[\sum (2\ell + 1) P_\ell(\cos \theta) [j_\ell(kr)]^2 \right] r^2 dr \\ &= - \int_0^\infty U(r) \left[\frac{\sin qr}{qr} \right] r^2 dr, \quad \text{où} \end{aligned}$$

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{représente le moment de transfert.}$$

C. Application à la diffusion Coulombienne

On peut tenter d'appliquer l'approximation de Born au potentiel Coulombien. Il vient

$$f_C(\theta) = - \int_0^\infty \frac{A}{r} \left[\frac{\sin qr}{qr} \right] r^2 dr = - \frac{A}{q} \int_0^\infty \sin qr dr.$$

Il convient d'écrire

$$\begin{aligned} f_C(\theta) &= \frac{A}{q} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[- \int_0^\infty e^{-\lambda r} \sin qr dr \right] \\ &= \frac{A}{q} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-\lambda r}}{\lambda^2 + q^2} (\lambda \sin qr + q \cos qr) \right]_0^\infty \\ &= A \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\lambda^2 + q^2} \right] = \frac{A}{q^2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule de Rutherford.

La méthode permet de faire le calcul dans le cas d'une distribution de charge spatiale. Nous supposons qu'il s'agit d'une distribution $\rho(r)$ à symétrie sphérique. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} U(r) &= - A \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') 4 \pi r''^2 dr'' \quad \text{et} \\ f(\theta) &= \frac{A}{q} \int_0^\infty \left[\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') 4 \pi r''^2 dr'' \right] \sin qr \cdot r dr. \end{aligned}$$

Intégrons par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty &= \left[\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') 4 \pi r''^2 dr'' \right] \frac{\sin qr - qr \cos qr}{q^2} \bigg|_{r=0}^{r=\infty} \\ &+ \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \left[\int_0^r \rho(r') 4 \pi r'^2 dr' \right] \frac{\sin qr - qr \cos qr}{q^2}. \end{aligned}$$

Le premier terme est nul et on obtient :

$$f(\theta) = \frac{A}{q^3} \int_0^\infty \left[\int_0^r \rho(r') 4 \pi r'^2 dr' \right] \frac{\sin qr - qr \cos qr}{r^2} dr.$$

Intégrons encore par parties :

$$\int_0^{\infty} = \left[\int_0^r \rho(r') 4 \pi r'^2 dr' \right] \left(q - \frac{\sin qr}{r} \right) \Big|_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= \int_0^{\infty} \rho(r) 4 \pi r^2 dr \left(q - \frac{\sin qr}{r} \right) \quad \text{ou encore}$$

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{\infty} \rho(r) 4 \pi r^2 dr (q - q) + \int_0^{\infty} \rho(r) 4 \pi r^2 dr \frac{\sin qr}{r} .$$

Finalement on trouve

$$f(\theta) = \frac{A}{q^2} \int_0^{\infty} \rho(r) \left[\frac{\sin qr}{qr} \right] 4 \pi r^2 dr , \text{ avec le facteur de}$$

forme (comparer avec une charge ponctuelle)

$$F(q) = \int_0^{\infty} \rho(r) \left[\frac{\sin qr}{qr} \right] 4 \pi r^2 dr .$$

Par exemple, dans le cas d'une distribution sphérique uniforme telle que

$$U(r) = - \frac{A}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{et}$$

$$\rho(r) = \frac{3}{4 \pi R^3} \quad \text{pour } r < R,$$

$$U(r) = - \frac{A}{R} \quad \text{et}$$

$$\rho(r) = 0 \quad \text{pour } r > R,$$

$$F(q) = \frac{3}{qR^3} \int_0^R \sin qr \cdot r dr$$

$$= \frac{3}{q^3 R^3} (\sin qR - qR \cos qR), \text{ soit}$$

$$[F(q)]^2 \neq 1 - \frac{q^2 R^2}{5} .$$

D. Calcul correct de la diffusion coulombienne

1. Fonction hypergéométrique confluyente

Cette application désigne les solutions des équations différentielles telles que

$$x F'' + (b - x) F' - aF = 0.$$

Posons

$$F = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad \text{et faisons la substitution.}$$

En annulant le coefficient de x^{n-1} on trouve
 $\alpha_0 n [n - 1 + b] = 0.$

En annulant le coefficient de x^{n+k} on trouve

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{n + k + a}{(n + k + b)(n + k + 1)}.$$

Comme le coefficient α_0 ne peut pas être nul, la 1ère condition impose :

- ou bien $n = 0,$

auquel cas la 2ème condition donne

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{k + a}{(k + b)(k + 1)} \quad , \text{ d'où la solution}$$

$$F_1 = \alpha_0 \left[1 + \frac{a}{b} x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \right] \quad \text{soit}$$

$$F_1 = \alpha_0 M [a, b, x] \quad \text{par définition.}$$

- ou bien $n = 1 - b,$

auquel cas la 2ème condition donne

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{k + a + 1 - b}{(k + 2 - b)(k + 1)} \quad , \text{ d'où la solution}$$

$$F_2 = \alpha_0 M [a + 1 - b, 2 - b, x] \cdot x^{1-b}.$$

Il faut remarquer que

$$F_2 \equiv F_1 \quad \text{si } b = 1.$$

Les fonctions hypergéométriques confluentes apparaissent dans les calculs de diffusion Coulombienne. Leur comportement asymptotique est tel que

$$M [a, b, x \rightarrow \infty] = \Gamma(b) \left[\frac{(-x)^{-a}}{\Gamma(b-a)} + \frac{e^x x^{a-b}}{\Gamma(a)} \right].$$

2. Solution en ondes globales

L'équation à résoudre peut s'écrire

$$\left[\nabla^2 + k^2 - \frac{2k\alpha}{r} \right] \psi(\vec{r}) = 0.$$

Cherchons une solution de la forme

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} \phi(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad z = r \cos \theta.$$

On trouve la nouvelle équation

$$\nabla^2 \phi + 2ik \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{2k\alpha}{r} \phi = 0.$$

Posons maintenant

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = ik(r-z).$$

Il vient alors

$$\xi \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + (1 - \xi) \frac{d\phi}{d\xi} + i\alpha \phi = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\phi(\xi) = C. M[-i\alpha, 1, ik(r-z)].$$

Il faut remarquer que nous sommes dans le cas $b = 1$ si bien qu'il n'y a pas lieu d'écrire une combinaison linéaire des deux solutions F_1 et F_2 .

En prenant

$$C = e^{-i\alpha \frac{\pi}{2}} \Gamma(1 + i\alpha) \quad \text{et en utilisant la forme asymptotique}$$

donnée plus haut, on trouve

$$\psi(\vec{r}) = I(\vec{r}) + S(r) f(\theta) \quad , \quad \text{avec}$$

$$I = e^{i[kz + \alpha Lk(r-z)]} \quad ,$$

$$S = \frac{1}{r} e^{i[kr - \alpha L2kr]} \quad ,$$

$$f(\theta) = \frac{\alpha}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{i[-\alpha L \sin^2 \frac{\theta}{2} + \pi + 2\sigma_0]} \quad ,$$

et
$$e^{2i\sigma_0} = \frac{\Gamma(1 + i\alpha)}{\Gamma(1 - i\alpha)}.$$

A un déphasage près, il est remarquable qu'on trouve toujours la section efficace de Rutherford

$$|f(\theta)|^2 = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \frac{zZe^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 = \left[\frac{A}{q^2} \right]^2.$$

Le choix de la constante C a pour but de fournir une onde incidente de module unitaire. On montre que cette onde incidente peut s'écrire

$$I = \sum_{\ell} a_{\ell} f_{\ell}(r) P_{\ell}(\cos \theta), \quad \text{avec}$$

$a_\ell = (2\ell + 1) i^\ell$ et des fonctions telles que

$$f_\ell(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2 i k r} \left[- e^{-i[kr - \alpha L 2kr - \ell \frac{\pi}{2}]} + e^{i[kr - \alpha L 2kr - \ell \frac{\pi}{2}]} \right].$$

On voit que la décomposition ne se fait plus en ondes sphériques, l'influence du potentiel coulombien à longue portée se traduisant par l'apparition d'un terme de déformation logarithmique dans les exposants.

3. Solution en ondes partielles

Posons

$$\psi(\vec{r}) = \sum A_\ell \psi_\ell(r) P_\ell(\cos \theta). \text{ Il vient}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\psi_\ell) + \left[k^2 - \frac{2k\alpha}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] (r\psi_\ell) = 0.$$

Posons

$$\psi_\ell(r) = r^\ell e^{ikr} \phi_\ell(r). \text{ On obtient}$$

$$r \frac{d^2}{dr^2} \phi_\ell + 2[\ell + 1 + ikr] \frac{d}{dr} \phi_\ell + 2ik[\ell + 1 + i\alpha] \phi_\ell = 0.$$

La solution est encore une fonction hypergéométrique confluyente. Il faut seulement prendre F_1 car F_2 est infinie à l'origine. Finalement

$$\phi_\ell \propto M[\ell + 1 + i\alpha, 2\ell + 2, -2ikr].$$

On trouve alors, pour $r \rightarrow \infty$,

$$\psi_\ell \rightarrow r^\ell e^{ikr} \left[\frac{\Gamma(2\ell + 2)}{\Gamma(\ell + 1 - i\alpha)} (+2ikr)^{-\ell-1-i\alpha} + \frac{\Gamma(2\ell + 2)}{\Gamma(\ell + 1 + i\alpha)} e^{-2ikr} (-2ikr)^{-\ell-1+i\alpha} \right]$$

$$\text{soit } \psi_\ell \rightarrow \frac{1}{2 i k r} \left[- e^{-i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} + \sum_\ell e^{i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} \right]$$

avec

$$\sum_\ell = \frac{\Gamma(\ell + 1 + i\alpha)}{\Gamma(\ell + 1 - i\alpha)} = e^{2i\sigma_\ell}.$$

Pour calculer le coefficient il faut identifier

$$\sum \frac{A_\ell}{2 i k r} \left[- e^{-i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} + \sum_\ell e^{i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} \right] P_\ell(\cos \theta) =$$

$$I + S f(\theta) =$$

$$\sum \frac{(2\ell + 1) i^\ell}{2 i k r} \left[- e^{-i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} + e^{i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} \right] P_\ell(\cos \theta)$$

$$+ \frac{1}{r} e^{i[kr - \alpha L 2kr]} \sum C_\ell P_\ell(\cos \theta). \text{ On trouve}$$

$$A_\ell = (2\ell + 1) i^\ell \quad \text{et}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2 i k} \sum (2\ell + 1) (\Sigma_\ell - 1) P_\ell(\cos \theta).$$

4. Potentiels Coulombien et nucléaire

Dans la plupart des expériences, le potentiel Coulombien se superpose au potentiel nucléaire, qui est en général celui qu'on désire étudier.

Une décomposition en ondes sphériques déformées montrerait qu'il faut écrire

$$\psi_\ell \rightarrow \frac{1}{2 i k r} \left[- e^{-i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} + \sum_\ell D_\ell e^{i[kr - \ell \frac{\pi}{2} - \alpha L 2kr]} \right].$$

Il suffit d'additionner les déphasages, ce qui donne pour l'amplitude de diffusion*

$$f_{CN}(\theta) = \frac{1}{2 i k} \sum (2\ell + 1) \left[e^{2i(\sigma_\ell + \delta_\ell)} - 1 \right] P_\ell(\cos \theta).$$

On peut donc écrire

$$f_{CN}(\theta) = f_C(\theta) + f_N^*(\theta), \text{ avec}$$

$$f_C(\theta) = \frac{1}{2 i k} \sum (2\ell + 1) \left[e^{2i\sigma_\ell} - 1 \right] P_\ell(\cos \theta)$$

$$\text{et } f_N^*(\theta) = \frac{1}{2 i k} \sum (2\ell + 1) e^{2i\sigma_\ell} \left[e^{2i\delta_\ell} - 1 \right] P_\ell(\cos \theta).$$

On voit que l'amplitude "nucléaire" est modifiée par rapport à ce qu'elle serait sans potentiel Coulombien. Il convient de bien noter qu'il n'y a pas, en général, addition des sections efficaces.

$$|f_{CN}(\theta)|^2 \neq |f_C(\theta)|^2 + |f_N(\theta)|^2.$$

* En fait il faudrait écrire $\delta_\ell = \delta_\ell^{\text{nucléaire}} + \delta_\ell^{\text{distorsion}}$.

5. Diffusion Coulombienne relativiste

Mott⁽⁶²⁾ a traité le problème de la diffusion coulombienne relativiste pour une particule avec spin. Le résultat peut s'écrire

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{mzZe^2}{2 p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad \text{avec}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad p = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Pour une particule sans spin on a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{mzZe^2}{2 p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 .$$

Le traitement suppose un noyau ponctuel sans polarisation et néglige l'effet de recul.

Diverses corrections ont été apportées par de nombreux auteurs. Pour plus amples informations et références, on se rapportera par exemple aux articles de revue de Hofstadter⁽⁵⁴⁾ ou Motz et al⁽⁶³⁾.

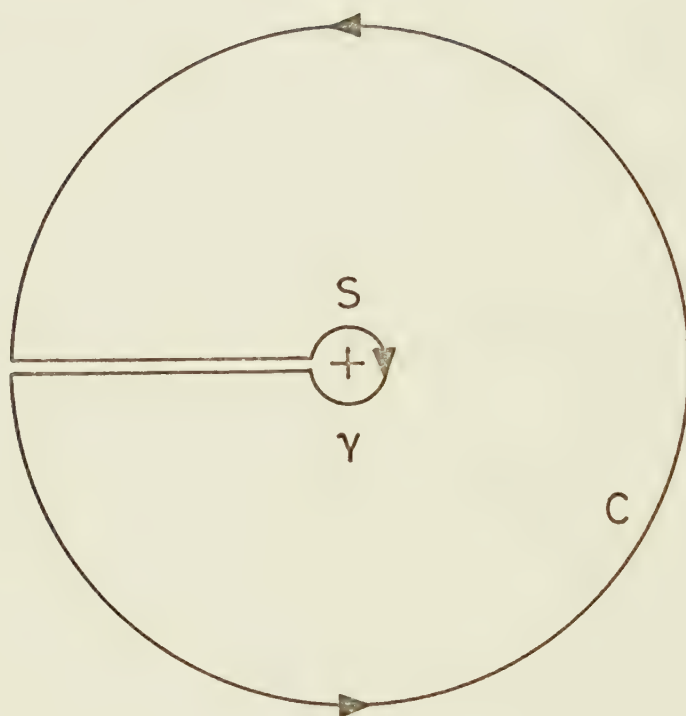


FIG. 77

A P P E N D I C E VI

LES RELATIONS DE DISPERSION

A. Rappels sur les fonctions analytiques

1. Le théorème de Cauchy

Soit une fonction $F(u)$ de la variable complexe u , uniforme et analytique à l'intérieur du contour c , sauf pour un nombre fini de points singuliers S . On peut exclure ces points singuliers au moyen de cercles de faible rayon et de canaux très fins (Figure 77).

Le théorème de Cauchy s'écrit alors

$$\int_c F(u) du - \sum \int_\gamma F(u) du = 0 .$$

Faisons le calcul pour le pôle S en utilisant le développement de Laurent

$$F(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k (u - u_S)^k = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k [r e^{i\theta}]^k .$$

En intégrant, tous les termes disparaissent sauf un et on trouve

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(u) du &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k \int_0^{2\pi} [r e^{i\theta}]^k d[r e^{i\theta}] \\ &= 2 \pi i A_{-1} , \end{aligned}$$

où A_{-1} est le résidu relatif au pôle S .

Finalement on obtient

$$\int_c F(u) du = 2 \pi i \sum \text{résidus} .$$

D'après cette formule, si le contour c ne contient aucun point singulier de la fonction $F(u)$, on peut calculer sa valeur en tout point intérieur par la relation

$$\int_c du \frac{F(u)}{u - u_0} = 2 \pi i F(u_0) .$$

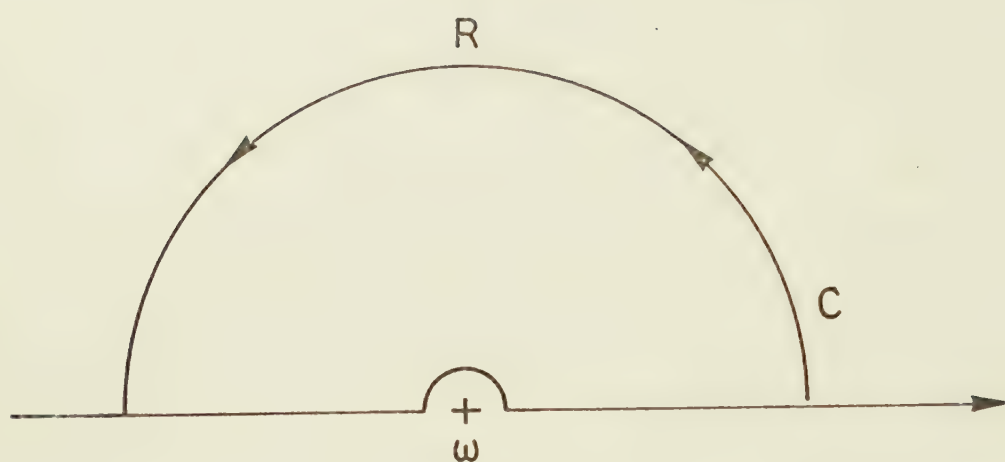


FIG. 78

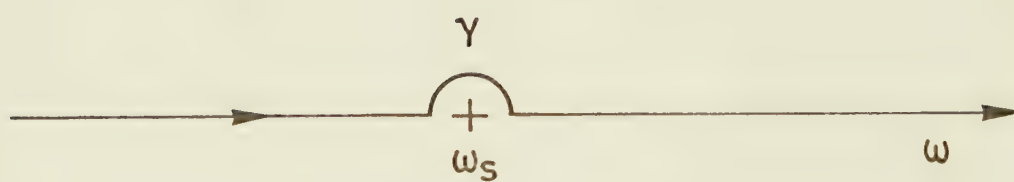


FIG. 79

Les fonctions qui nous intéressent n'ont généralement de sens physique que pour des valeurs réelles de la variable. Cependant des calculs dans le plan complexe conduisent à des relations utiles entre les parties réelle et imaginaire de ces fonctions. On les appelle relations de dispersion, parce qu'elles ont été établies tout d'abord dans l'étude de la dispersion de la lumière dans la matière.

2. Les relations de Hilbert

Proposons nous de calculer, ω étant un point de l'axe réel

$$\int_C du \frac{F(u)}{u - \omega},$$

en utilisant le contour c constitué par une partie de l'axe réel et un demi-cercle de centre ω et de rayon $R \rightarrow \infty$. On peut exclure le point ω en décrivant un demi-cercle de centre ω et de rayon $r \rightarrow 0$ (Fig. 78).

Nous supposons que $F(u)$ ne possède aucun point singulier dans le demi-plan supérieur et que

$$F(u) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |u| \rightarrow \infty.$$

Dans ces conditions

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{d(R e^{i\theta})}{R e^{i\theta}} F(\omega + R e^{i\theta}) < \pi i |F|_{\text{MAX}} \rightarrow 0$$

et on est ramené à l'expression

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega-r} + \int_{\omega+r}^{+\infty} d\omega' \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega} \right. \\ \left. - \int_0^\pi \frac{d(r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} F(\omega + r e^{i\theta}) \right] = 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad \text{avec}$$

$$P \int_a^b = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_a^{\omega-r} + \int_{\omega+r}^b \right] \quad (\text{partie principale}).$$

Dans le cas où la fonction possède un pôle au point ω_s (Fig 79), il faut ajouter dans le calcul précédent un terme

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[- \int_{\gamma} du \frac{F(u)}{u - \omega} \right] = - \frac{1}{\omega_S - \omega} \int_{\gamma} du \frac{A-1}{u - \omega_S}$$

$$= - \frac{A-1}{\omega_S - \omega} \int_0^{\pi} \frac{d(r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} = - \pi i \frac{A-1}{\omega_S - \omega},$$

et on obtient finalement les relations de Hilbert

$$\operatorname{Re} F(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} F(\omega')}{\omega' - \omega} - \Sigma \frac{R_S}{\omega_S - \omega},$$

$$\operatorname{Im} F(\omega) = - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} F(\omega')}{\omega' - \omega} - \Sigma \frac{I_S}{\omega_S - \omega},$$

où R_S et I_S représentent les parties réelles et imaginaires des résidus éventuels.

B. Relations de dispersion et notion de causalité*

1. Généralités

On peut rattacher directement les relations de dispersion à la notion de causalité.

Imaginons un système qui reçoit un signal S_1 et fournit une réponse S_2 . On peut écrire en général

$$S_2(t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 G(t_2 - t_1) S_1(t_1),$$

où la fonction de Green du système est telle que

$$G(t_2 - t_1) = 0 \quad \text{si} \quad t_2 - t_1 < 0.$$

Dans ces conditions on montre que la transformée de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(t) e^{i\omega t} \quad \text{satisfait aux relations de}$$

dispersion.

Inversement si $F(\omega)$ satisfait aux relations de dispersion, la transformée de Fourier inverse

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F(\omega) e^{-i\omega t} \quad \text{est nulle pour} \quad t < 0.$$

* Ce paragraphe s'inspire du livre de H. MUIRHEAD : *The Physics of Elementary Particles* (Pergamon Press).

Partons par exemple de

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi i} \text{ P } \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega} \quad \text{et calculons } G(t).$$

Il vient

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' F(\omega') \left[\frac{1}{\pi i} \text{ P } \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega' - \omega} \right],$$

avec

$$\frac{1}{\pi i} \text{ P } \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega' - \omega} = \frac{t}{|t|} e^{-i\omega' t}.$$

Si $t < 0$ on trouve bien

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' F(\omega') [-e^{-i\omega' t}] = -G(t) = 0.$$

Il y a équivalence totale entre les deux points de vue.

2. Application aux rayons X

La relation qui donne la polarisation d'un milieu sous l'action d'un champ électrique

$$\frac{P}{E} = \frac{n^2 - 1}{4\pi} \quad \text{et} \quad \frac{n^2 - 1}{2\pi} \quad , \text{ implique la notion de causalité et on}$$

peut vérifier que l'indice

$$n(\omega) \propto \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\omega A} \quad \text{satisfait la relation}$$

$$\text{Re } n(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \text{ P } \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } n(\omega')}{\omega' - \omega}.$$

Compte tenu des propriétés de symétrie de la fonction on peut écrire tout aussi bien

$$\text{Re } n(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \text{ P } \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } n(\omega')}{\omega' + \omega} \quad \text{d'où}$$

$$\text{Re } n(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \text{ P } \int_{-\infty}^{+\infty} \omega' d\omega' \frac{\text{Im } n(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Re} n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \omega' d\omega' \frac{\operatorname{Im} n(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}.$$

Nous venons d'obtenir la relation de Kramers-Kronig dont l'intérêt essentiel, du point de vue des phénomènes de diffusion, est de permettre le calcul de

$\operatorname{Re} f(0)$ à partir de $\operatorname{Im} f(0)$.

Le changement d'écriture consiste à poser

$$\operatorname{Re} n(\omega) - 1 = \frac{2}{\omega^2} \operatorname{Re} f(0) \equiv \frac{2}{k^2} \operatorname{Re} f(0) \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Im} n(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \operatorname{Im} f(0) \equiv \frac{\sigma_T}{2k} \quad \text{par application du théorème}$$

optique.

C. Diffusion pion-nucléon*

1. Les états d'isospin

Dans le cas de la diffusion vers l'avant ($\theta = 0$)

$\vec{k} \wedge \vec{k}' = 0$ et le spin du nucléon n'intervient pas, si bien que l'étude peut être faite uniquement en fonction des différents états d'isospin. Comme

$T_{\pi} = 1$ et $T_N = \frac{1}{2}$, on peut avoir les états

$$T = \frac{3}{2} \quad T_3 = +\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{et}$$

$$T = \frac{1}{2} \quad T_3 = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \text{ qui se décomposent suivant}$$

$$|\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\rangle = |\pi^+ p\rangle$$

$$|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^+ n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 p\rangle$$

$$|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 n\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^- p\rangle$$

$$|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = |\pi^- n\rangle$$

$$|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+ n\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^0 p\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^0 n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^- p\rangle.$$

* Ce paragraphe s'inspire du cours de B. DIU : Introductory Lectures on Dispersion Relations (Herceg-Noví, 1966).

Inversement on peut décomposer les différents états du système pion-nucléon en états d'isospin suivant

$$|\pi^+ p\rangle = \left| \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^+ n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^0 p\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^0 n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^- p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\pi^- n\rangle = \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right\rangle.$$

Soient $T_{3/2}$ et $T_{1/2}$ les amplitudes de diffusion caractéristiques des états $T = 3/2$ et $T = 1/2$ respectivement. A partir des états initiaux

$$|\pi^+ p\rangle \quad |\pi^+ n\rangle \quad |\pi^0 p\rangle \quad |\pi^0 n\rangle \quad |\pi^- p\rangle \quad |\pi^- n\rangle$$

on obtient par diffusion

$$S|\pi^+ p\rangle = T_{3/2} |\pi^+ p\rangle$$

$$S|\pi^+ n\rangle = \frac{1}{3} (T_{3/2} + 2 T_{1/2}) |\pi^+ n\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{3/2} - T_{1/2}) |\pi^0 p\rangle$$

$$S|\pi^0 p\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{3/2} - T_{1/2}) |\pi^+ n\rangle + \frac{1}{3} (2 T_{3/2} + T_{1/2}) |\pi^0 p\rangle$$

$$S|\pi^0 n\rangle = \frac{1}{3} (2 T_{3/2} + T_{1/2}) |\pi^0 n\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{3/2} - T_{1/2}) |\pi^- p\rangle$$

$$S|\pi^- p\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{3/2} - T_{1/2}) |\pi^0 n\rangle + \frac{1}{3} (T_{3/2} + 2 T_{1/2}) |\pi^- p\rangle$$

$$S|\pi^- n\rangle = T_{3/2} |\pi^- n\rangle.$$

2. Les relations de dispersion

Les relations de dispersion sont appliquées aux amplitudes

$$T^+ = \frac{1}{3} (T_{1/2} + 2 T_{3/2}) \quad \text{et}$$

$$T^- = \frac{1}{3} (T_{1/2} - T_{3/2}).$$

Il est facile de voir d'après les formules précédentes que T^+ correspond aux diffusions

$$\pi^0 (p \text{ ou } n) \rightarrow \pi^0 (p \text{ ou } n) \text{ et aux moyennes}$$

$$\frac{1}{2} [(\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p) + (\pi^\pm n \rightarrow \pi^\pm n)] \text{ et}$$

que T^- correspond aux diffusions avec échange.

Lorsqu'on veut étudier la diffusion pion-noyau, et plus particulièrement dans le cas d'un noyau comme le Carbone 12 qui contient autant de protons que de neutrons, il est logique de considérer

$$T^+ \equiv f(0) = \frac{1}{2} [f_p(0) + f_n(0)].$$

Il faut adapter le calcul au problème actuel. Ainsi l'énergie d'une particule de masse au repos m est telle que

$$m < \omega < \infty \quad \text{et}$$

$$-\infty < \omega < m \quad \text{correspond à une région non-physique.}$$

On peut faire l'intégration pour

$-\infty < \omega < -m$ en utilisant les propriétés de symétrie de la fonction. Dans la zone restante où

$-m < \omega < m$ on montre que l'amplitude est nulle, sauf en certains pôles dont la présence correspond à l'existence d'états intermédiaires dans la diffusion.

En procédant comme pour la relation de Kramers-Kronig, on arrive à l'expression suivante

$$\text{Re } T^+(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_m^\infty \omega' d\omega' \frac{\text{Im } T^+(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} - \sum_S \frac{R_S \omega_S}{\omega_S^2 - \omega^2}$$

qu'on transforme pour des questions de convergence en faisant la soustraction

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re } T^+(\omega) - \text{Re } T^+(m)}{\omega^2 - m^2} &= \frac{2}{\pi} P \int_m^\infty \omega' d\omega' \frac{\text{Im } T^+(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - m^2)} \\ &\quad - \sum_S \frac{R_S \omega_S}{(\omega_S^2 - \omega^2)(\omega_S^2 - m^2)} \end{aligned}$$

On voit que la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant peut se calculer en fonction de la partie imaginaire, donc en fonction de la section efficace totale, moyennant certaines hypothèses.

La difficulté théorique reste évidemment d'évaluer correctement la contribution des pôles de la région non-physique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. C.M.G. LATTES, H. MUIRHEAD, G.P.S. OCCHIALINI, C.F. POWELL
Nature 159 (1947) 694
2. D.H. STORK
Physical Review 93 (1954) 868
3. A.E. IGNATENKO
Symposium on High Energy Accelerators and Pion Physics,
Geneva, CERN 56-26 Proceedings (1956) 313
4. W.F. BAKER, J. RAINWATER, R.E. WILLIAMS
Physical Review 112 (1958) 1763
W.F. BAKER, H. BYFIELD, J. RAINWATER
Physical Review 112 (1958) 1773
5. T.E.O. ERICSON
International Conference on High Energy Physics and Nuclear
Structure, Geneva, CERN 63-28 Proceedings (1963) 47
6. M. JEAN
Supplemento al Nuovo Cimento II (1964) 400
7. D.S. JACKSON
Los Alamos Scientific Laboratory (1968) TID 4500.
8. V.S. BARASHENKOV, K.K. GUDIMA, V.D. TONEEV
Joint Institute for Nuclear Research (1968) P 4068
9. D.S. KOLTUN
Advances in Nuclear Physics 3 (1969) 71
10. T.R. WITTEN, M. BLECHER, K. GOTOW
Physical Review 174 (1968) 1166
11. S. OZAKI, R. WEINSTEIN, G. GLASS, E. LOH, L. NEIMALA, A. WATTENBERG
Physical Review Letters 4 (1960) 533
12. S.G. ECKSTEIN
Physical Review 129 (1963) 413
13. M.E. NORDBERG, K.F. KINSEY, R.L. BURMAN
Physical Review 165 (1968) 1096
14. T. BRESSANI, G. CHARPAK, F. FAVIER, L. MASSONNET, W.E. MEYERHOF,
C. ZUPANČIĆ
Nuclear Instruments and Methods 58 (1969) 13

15. C. ZUPANČIČ
International Conference on High Energy Physics and Nuclear
Structure, Rehovoth, North-Holland Proceedings (1967) 171
16. T. BRESSANI, G. CHARPAK, J. FAVIER, L. MASSONNET, W.E. MEYERHOF,
C. ZUPANČIČ
Symposia on Theoretical Physics and Mathematics, Plenum Press
8 (1968) 87
17. P.E. ARGAN, G.C. MANTOVANI, P. MARAZZINI, A. PIAZZOLI,
D. SCANNICCHIO
Supplemento al Nuovo Cimento III (1965) 245
18. D.B. ISABELLE, C.F. WILLIAMSON
Medium Energy Nuclear Physics with Electron Linear Accelerators,
MIT Conference (1967) TID 24667
19. D.T. CHIVERS, J.J. DOMINGO, E.M. RIMMER, R.C. WITCOMB,
B.W. ALLARDYCE, N.W. TANNER
Physics Letters 26 B (1968) 573
20. D.L. LIND, B.C. DARISH, R.J. KURZ, P.M. OGDEN, V. PEREZ-MENDEZ
Physical Review 138 B (1965) 1509
21. S.G.F. FRANK, J.R. HOLT, T. MASSAM, G. MYATT
Proceedings of the Physical Society 92 (1967) 609
22. J.M. EISENBERG
Nuclear Physics B 3 (1967) 387
23. F. BECKER, Z. MARIČ
Il Nuovo Cimento B 41 (1966) 174
24. Y.A. BATUSOV, S.A. BUNYATOV, V.M. SIDOROV, V.A. YARBA
Soviet Journal of Nuclear Physics 3 (1966) 223
25. L. GILLY, M. JEAN, R. MEUNIER, M. SPIGHEL, J.P. STROOT, P. DUTEIL,
A. RODE
Physics Letters 11 (1964) 244
L. GILLY, M. JEAN, R. MEUNIER, M. SPIGHEL, J.P. STROOT, P. DUTEIL
Physics Letters 19 (1965) 335
26. L. KAUFMAN, B.W. GAULD, V. PEREZ-MENDEZ, J.P. SPERINDE,
S.H. WILLIAMS
Physics Letters 25 B (1967) 536
27. J.C. SENS
International Conference on High Energy Physics and Nuclear
Structure, Rehovoth, North-Holland Proceedings (1967) 93
28. L.S. KISSLINGER
Physical Review 98 (1955) 761
29. M. ERICSON, T.E.O. ERICSON
Annals of Physics 36 (1966) 323
30. D.A. JENKINS, R. KUNSELMAN, M.K. SIMMONS, T. YAMAZAKI
Physical Review Letters 17 (1966) 1
D.A. JENKINS, R. KUNSELMAN
Physical Review Letters 17 (1966) 1148

31. G. BACKENSTOSS, S. CHARALAMBUS, H. DANIEL, H. KOCH, G. POELZ,
H. SCHMITT, L. TAUSCHER
Physics Letters 25 B (1967) 305

G. POELZ, H. SCHMITT, L. TAUSCHER, G. BACKENSTOSS, S. CHARALAMBUS,
H. DANIEL, H. KOCH
Physics Letters 26 B (1968) 331
32. F. BRADAMANTE, S. CONETTI, G. FIDECARO, M. FIDECARO, M. GIORGI,
A. PENZO, L. PIEMONTESE, F. SAULI, P. SCHIAVON
Physics Letters 28 B (1968) 191
33. P. CHAVANON, M. CROZON, T. LERAY, J.L. NARJOUX, Z. MARIČ^V
Il Nuovo Cimento A 40 (1965) 935
34. J. COMBE, J. GARDES, M. QUERROU, E. DAHL-JENSEN, N. DOBLE
Physics Letters (à paraître)
35. R.J. GLAUBER
International Conference on High Energy Physics and Nuclear
Structure, Rehovoth, North-Holland Proceedings (1967) 311
36. N.W. TANNER
Symposium on the use of Nimrod for Nuclear Structure Physics,
Rutherford Laboratory Proceedings (1968) 91 RHEL/R 166
37. J. FORMANEK, J.S. TREFIL
Nuclear Physics B 3 (1967) 155
38. L. BERTOCCHI, L. CANESCHI
Il Nuovo Cimento A 52 (1967) 295
39. B. MARGOLIS
Physics Letters 26 B (1968) 524
40. M.M. STERNHEIM, R. HOFSTADTER
Il Nuovo Cimento 38 (1965) 1854
41. M.E. NORDBERG, K.F. KINSEY
Physics Letters 20 (1966) 692
42. M.M. BLOCK
Physics Letters 25 B (1967) 604

M.M. BLOCK, I. KENYON, J. KEREN, D. KOETKE, P. MALHOTRA,
R. WALKER, H. WINZELER
Physical Review 169 (1968) 1074
43. K.M. CROWE, A. FAINBERG, J. MILLER, A.S.L. PARSONS
Lawrence Radiation Laboratory (1968) UCRL 18473
44. M. ERICSON
Il Nuovo Cimento A 47 (1967) 49
45. G.B. WEST
Physical Review 162 (1967) 1677
46. V.G. KIRILLOV-UGRYUMOV, L.P. KOTENKO, E.P. KUZNETSOVI,
F.M. SERGEEV, A.F. GRASHIN
Soviet Physics JETP 37 (1960) 907

47. V.S. DEMIDOV, V.G. KIRILLOV-UGRYUMOV, A.K. PONOSOV,
V.P. PROTASOV, F.M. SERGEEV
Soviet Physics JETP 42 (1962) 1172
48. R.M. EDELSTEIN, W.F. BAKER, J. RAINWATER
Physical Review 122 (1961) 252
49. J. BEINER, P. HUGUENIN
Journal of Applied Mathematics and Physics 18 (1967) 912
50. J. S. BLAIR
Physical Review 115 (1959) 928
51. R.H. MILLER
Il Nuovo Cimento 6 (1957) 882
52. F.P.G. VALCKX, E.S. GELSEMA, M. KRUISKAMP
Il Nuovo Cimento 23 (1962) 1005
53. E.H. AUERBACH, D.M. FLEMING, M.M. STERNHEIM
Physical Review 162 (1967) 1683
54. R. HOFSTADTER
Reviews of Modern Physics 28 (1956) 214
55. R. MEUNIER, J.P. STROOT, B. LEONTIC, A. LUNDBY
Nuclear Instruments and Methods 17 (1962) 1
R. MEUNIER, J.P. STROOT, B. LEONTIC, A. LUNDBY, P. DUTEIL
Nuclear Instruments and Methods 17 (1962) 20
56. C. SERRE
Rapport CERN 67-5 (1967)
57. M. CROZON, P. CHAVANON, A. COURAU, T. LERAY, J.L. NARJOUX,
J. TROQUEVILLE
Nuclear Physics 64 (1965) 567
58. R.M. FRANK, J.L. GAMMEL, K.M. WATSON
Physical Review 101 (1956) 891
59. K.W. MAC VOY, L. HELLER, M. BOLSTERLI
Reviews of Modern Physics 39 (1967) 245
60. T.E.O. ERICSON, J. FORMANEK, M.P. LOCHER
Physics Letters 26 B (1967) 91
61. Y. KIMURA, Y. NAGASHIMA
Progress of Theoretical Physics 33 (1965) 43
62. N.F. MOTT
Proceedings of the Royal Society (London) A 124 (1929) 425
63. J.W. MOTZ, H. OLSEN, H.W. KOCH
Reviews of Modern Physics 36 (1964) 881

Série : E

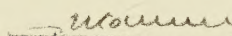
N° : 120

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

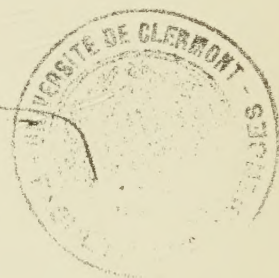
(Décret n° 67-750 du 29 Août 1967)

Clermont-Ferrand, le 5 Mars 1970.

Le Doyen,



R. KOHLMULLER



IMPRIMERIE DE LA FACULTE DES SCIENCES

Dépôt légal 2ème trimestre de 1970

